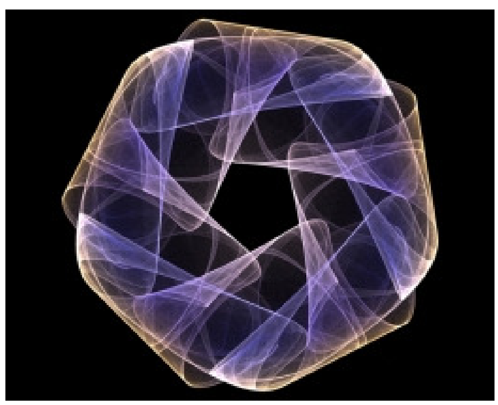
ανάλυση, σχόλια και προεκτάσεις
με αφορμή απαντήσεις μαθητών
σε ερωτήματα μαθηματικών που διατυπώθηκαν
για εργασία στη σχολική τάξη
(παραδείγματα από τα μαθηματικά του λυκείου)



του Δημητρίου Ντρίζου
σχολικού συμβούλου Μαθηματικών

Σημειώσεις υπό προετοιμασία, Δεκέμβριος 2010

Λίγα λόγια γι' αυτές τις Σημειώσεις

Τα παραδείγματα που συμπεριλάβαμε στις Σημειώσεις αυτές εστιάζονται κυρίως στην διερεύνηση, τον σχολιασμό και την αποτίμηση απαντήσεων μαθητών σε ερωτήματα, που προτάθηκαν κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών σε τμήματα λυκείων. Και αρθρώνονται ως εξής: Στην αρχή παρουσιάζεται ένα θέμα (με εντελώς λιτή διατύπωση) που δόθηκε για εργασία σε μαθητές. Καταγράφονται στη συνέχεια οι απαντήσεις τους· και έπειτα διατυπώνονται ερωτήματα με στόχο την ανάπτυξη ενός διαλόγου στο πλαίσιο της αξιολόγησής τους. Τέλος προστίθενται διάφορες παρατηρήσεις και ορισμένες ενδιαφέρουσες μαθηματικές προεκτάσεις.

[*Οι Σημειώσεις αυτές υπόκεινται σε συνεχείς βελτιώσεις και συμπληρώνονται με νέα θέματα*]

Δ.Ν., Δεκέμβριος 2010

Ένα θέμα στην διάταξη των πραγματικών αριθμών
[Δ.Ν., Άλγεβρα Α΄ Λυκείου, 2010α]

Θέμα:

Έστω $1 < x < 2$ και $4 < y < 5$

α. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{2} < \frac{y-3}{x} < 2$

β. Να αποδείξετε ότι $-29 < 6x - 7y < -16$

γ. Να βρείτε τα όρια[1] μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της παράστασης $-6x^2 + 7xy$

Προβληματισμός
Για το γ. ερώτημα του παραπάνω θέματος δόθηκαν από μαθητές της Α΄ Λυκείου οι επόμενες απαντήσεις:

Πρώτη απάντηση

$-6x^2 + 7xy = x\left(-6x + 7y\right)$
Πολ/ζοντας επί -1 τα μέλη της ανισότητας του β. ερωτήματος παίρνουμε
$16 < -6x + 7y < 29$
Και επειδή οι ομοιόστροφες ανισότητες $1 < x < 2$ και $16 < -6x + 7y < 29$ έχουν θετικά μέλη, τις πολ/ζουμε κατά μέλη και παίρνουμε
$16 < -6x^2 + 7xy < 58$

Δεύτερη απάντηση

Τα μέλη της ανισότητας $1 < x < 2$ είναι θετικά, οπότε $1^2 < x^2 < 2^2$ δηλαδή $1 < x^2 < 4$. Στη συνέχεια πολ/ζοντας επί -6 τα μέλη της $1 < x^2 < 4$ προκύπτει $-24 < -6x^2 < -6$: (1)
Πολ/ζοντας επί 7 τα μέλη της $1 < x < 2$ παίρνουμε $7 < 7x < 14$
Οι ανισότητες $7 < 7x < 14$ και $4 < y < 5$ είναι ομοιόστροφες με θετικά μέλη, οπότε με πολ/σμό κατά μέλη έχουμε $28 < 7xy < 70$: (2)
Τέλος, με πρόσθεση κατά μέλη των ομοιόστροφων ανισοτήτων (1) και (2) προκύπτει $4 < -6x^2 + 7xy < 64$

Ερωτήματα
Όπως παρατηρείτε οι δύο απαντήσεις καταλήγουν σε διαφορετικά όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της παράστασης $-6x^2 + 7xy$

---

[1] Εν προκειμένω με τη λέξη *ορια* εννοούμε άκρα ανοικτού διαστήματος. Σημειώνουμε ότι η ίδια λέξη χρησιμοποιείται με το ίδιο ακριβώς νόημα και από τη συγγραφική ομάδα του σχολικού βιβλίου της Άλγεβρας Α΄ Λυκείου: άσκηση 4 της Α΄ ομάδας στην σελ. 36 (έκδ. 2010).

Μήπως εντοπίζετε κάποιο σημείο ή κάποια σημεία των απαντήσεων στα οποία γίνεται λάθος;
Πως θα αντιμετωπίζατε ως αξιολογητής τις δύο παραπάνω απαντήσεις;
Μήπως έχετε να προτείνετε κάποια βελτίωση στη διατύπωση του γ. ερωτήματος;

Σχόλια και μαθηματικές προεκτάσεις

α. Το γεγονός ότι οι δύο παραπάνω απαντήσεις καταλήγουν σε διαφορετικά όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της παράστασης $-6x^2+7xy$ οφείλεται στο ότι οι αποδείξεις με συνεπαγωγές προσδιορίζουν κατά κανόνα υπερσύνολο τιμών, άρα και "ευρύτερα" άνω και κάτω όρια και όχι πάντα τα ίδια (καθώς αυτά εξαρτώνται τελικά από τον τρόπο με τον οποίο δημιουργούμε την παράσταση $-6x^2+7xy$, εφαρμόζοντας διαδοχικά κατάλληλες ιδιότητες της διάταξης των πραγματικών αριθμών).
Όσον αφορά δε την αξιολόγηση των δύο παραπάνω απαντήσεων, σημειώνουμε ότι και οι δύο είναι σωστές και πλήρως αποδεκτές.

β. Με σκοπό την ικανοποίηση της μαθηματικής περιέργειας (και μόνο) αναζητήσαμε τα "στενότερα" δυνατά όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της παράστασης $-6x^2+7xy$ με $1<x<2$ και $4<y<5$.
Είναι προφανές ότι μια τέτοια αναζήτηση παρουσιάζει ενδιαφέρον μόνο για εμάς τους μαθηματικούς· και βέβαια σε καμιά περίπτωση για τη διδασκαλία των μαθηματικών σε μαθητές της Α΄ Λυκείου!

$f(x,y)=-6x^2+7xy$, με $1<x<2$ και $4<y<5$

$$\inf\left[f(x,y);1<x<2,4<y<5\right]=\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 4}}\left(-6x^2+7xy\right)=22$$

$$\sup\left[f(x,y);1<x<2,4<y<5\right]=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 5}}\left(-6x^2+7xy\right)=46$$

Επίλυση τριγωνομετρικής εξίσωσης (*)
[Δ.Ν., Άλγεβρα Β΄ Λυκείου, 2010β]

Θέμα:

Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)=-1,\ x\in\mathbb{R}$

Προβληματισμός
Από μαθητές της Β΄ Λυκείου δόθηκαν οι επόμενες απαντήσεις:

Πρώτη απάντηση

$$\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)=-1\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{8}=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2},\ \text{όπου το } k \text{ διατρέχει το } \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$$

$$\Leftrightarrow x=k\pi+\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{16}$$

$$\Leftrightarrow x=k\pi+\frac{11\pi}{16}\ :(1)$$

Δεύτερη απάντηση

$$\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)=-1\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{8}=2k\pi-\frac{\pi}{2},\ \text{όπου το } k \text{ διατρέχει το } \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{16}$$

$$\Leftrightarrow x=k\pi-\frac{5\pi}{16}\ :(2)$$

Τρίτη απάντηση

Οι περισσότεροι μαθητές έλυσαν την εξίσωση $\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)=-1$ σύμφωνα με τον αλγόριθμο επίλυσης εξισώσεων μορφής $\eta\mu x=\eta\mu\theta$, που προτείνεται στο βιβλίο τους, και κατέληξαν στις λύσεις: $x=k\pi+\frac{11\pi}{16}$ ή $x=k\pi-\frac{5\pi}{16}$

Ερωτήματα

Όπως παρατηρείτε οι δύο πρώτες απαντήσεις καταλήγουν σε διαφορετικούς γενικούς τύπους έκφρασης των ριζών της παραπάνω εξίσωσης.
Μήπως εντοπίζετε λάθη ή διαπιστώνετε παραλείψεις;
Εκτιμάτε ότι "χάνονται" κάποιες ρίζες της εξίσωσης;
Πως θα αντιμετωπίζατε ως αξιολογητής τις δύο πρώτες απαντήσεις;

Σχόλια

Ο τύπος (1) προσδιορίζει με περιγραφή το σύνολο των ριζών της εξίσωσης $\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)=-1$, $x\in\mathbb{R}$, σύμφωνα με την πρώτη απάντηση. Θέτοντας $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$ βρίσκουμε το σύνολο αυτό με αναγραφή των στοιχείων του. Και ανάλογα βρίσκουμε με αναγραφή και το σύνολο των ριζών που προκύπτουν από τον τύπο (2) της δεύτερης απάντησης.
Η σύγκριση των παραπάνω συνόλων (με τη μορφή της αναγραφής των στοιχείων τους) μάς επιτρέπει να αποφανθούμε ότι όλες οι απαντήσεις των μαθητών είναι απόλυτα σωστές. Αν μάλιστα μπορούσαμε να εξασφαλίσουμε με βεβαιότητα ότι οι δύο πρώτες απαντήσεις των μαθητών δεν δόθηκαν στο πλαίσιο "τυφλής" απομνημόνευσης τύπων, τότε μάλλον πρέπει να δεχτούμε ότι οι εν λόγω μαθητές έχουν αισθητοποιήσει πλήρως τη διαδικασία αντιστοίχισης των σημείων της ευθείας των πραγματικών αριθμών στα σημεία του τριγωνομετρικού κύκλου: μια γνώση ουσιαστική και μάλιστα κομβικού χαρακτήρα για την τριγωνομετρία.

Ένας άλλος τρόπος προσδιορισμού των ριζών με αναγραφή (Δ.Ν.)

Ζητάμε τις ρίζες της εξίσωσης: $\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)=-1$, $x\in\mathbb{R}$

Καταρχήν θεωρούμε δύο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $\eta\mu x=-1$, για παράδειγμα τις $\frac{3\pi}{2}$ και $-\frac{\pi}{2}$

Στη συνέχεια αναζητούμε τα x για τα οποία: $2x+\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{2}$ και $2x+\frac{\pi}{8}=-\frac{\pi}{2}$. Βρίσκουμε $x=\frac{11\pi}{16}$, $x=-\frac{5\pi}{16}$

Οι αριθμοί $\frac{11\pi}{16}$ και $-\frac{5\pi}{16}$ είναι προφανώς δύο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)=-1$, με απόσταση $\delta=\frac{11\pi}{16}-\left(-\frac{5\pi}{16}\right)=\pi$

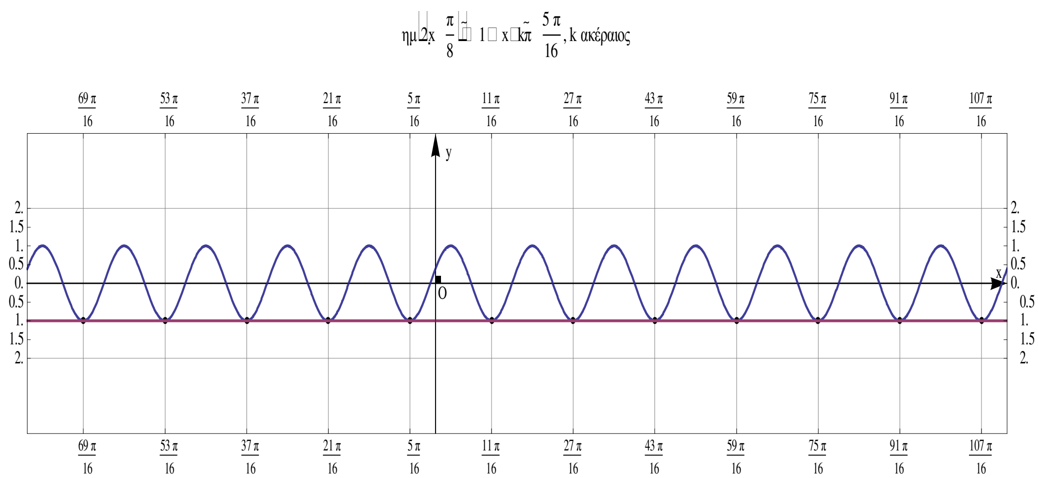
Λόγω της περιοδικότητας της συνάρτησης $\eta\mu$, το σύνολο των ζητούμενων ριζών αποτελείται από τους αριθμούς:

$$..., \frac{11\pi}{16} - 3\delta, \frac{11\pi}{16} - 2\delta, \frac{11\pi}{16} - \delta, \frac{11\pi}{16}, \frac{11\pi}{16} + \delta, \frac{11\pi}{16} + 2\delta, \frac{11\pi}{16} + 3\delta, ...$$

Και με αντικατάσταση της αριθμητικής τιμής του δ βρίσκουμε με αναγραφή τις ζητούμενες ρίζες:

$$..., -\frac{37\pi}{16}, -\frac{21\pi}{16}, -\frac{5\pi}{16}, \frac{11\pi}{16}, \frac{27\pi}{16}, \frac{43\pi}{16}, ...$$

Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y_1 = \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{8}\right)$ και $y_2 = -1$. Οι τετμημένες των κοινών τους σημείων απεικονίζουν τις ρίζες της εξίσωσης $y_1 = y_2$



Επίλυση τριγωνομετρικής εξίσωσης (**)
[Δ.Ν., Άλγεβρα Β΄ Λυκείου, 2010γ]

Θέμα:

Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$

Περιγραφή σχεδίου διδασκαλίας

Κατά τη διδασκαλία της ενότητας *επίλυση βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων* (άλγεβρα β΄ λυκείου) ένας καθηγητής αποφάσισε να αφιερώσει μία πλήρη διδακτική ώρα στη μελέτη τού παραπάνω θέματος. Το σχέδιό του ήταν ακριβώς το εξής: Σε έναν διαρκή διάλογο με τους μαθητές του θα αναζητούσαν πρώτα διάφορους τρόπους επίλυσης της παραπάνω εξίσωσης. Έπειτα θα σχεδίαζαν προσεκτικά, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y_1 = \eta\mu x$ και $y_2 = \sigma\upsilon\nu x$, και στη συνέχεια θα ακολουθούσε συζήτηση με στόχο να εμπεδώσουν οι μαθητές τη σχέση των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων με τις ρίζες της εξίσωσης $y_1 = y_2$ (διασύνδεση της γεωμετρικής εποπτείας με την συνακόλουθη αλγεβρική σκέψη).

Σημειώνουμε εδώ ότι το σχέδιο του καθηγητή υλοποιήθηκε σε γενικές γραμμές με ικανοποιητικά αποτελέσματα, και μάλιστα με άνεση χρόνου.

Ακολουθούν τρεις απαντήσεις μαθητών οι οποίες παρουσιάστηκαν στον πίνακα της τάξης:

Πρώτη απάντηση

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \text{ ή } x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + x,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } 0x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

Άρα $x = k\pi + \dfrac{\pi}{4}$

Δεύτερη απάντηση

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \text{ ή } x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + x$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } 0x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

Άρα $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

Τρίτη απάντηση

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$$

Ερωτήματα

Πως αξιολογείτε το σχέδιο του καθηγητή;
Εκτιμάτε ότι στο χρόνο μιας διδακτικής ώρας η τάξη των μαθητών θα έπρεπε να ασχοληθεί με περισσότερα θέματα;
Στις απαντήσεις των μαθητών μήπως διαπιστώνετε παραλείψεις;
Πως θα αντιμετωπίζατε ως αξιολογητής τις τρεις παραπάνω απαντήσεις;

Αναζήτηση ορίου συνάρτησης σε $x_0 \in \mathbb{R}$

[Δ.Ν., Μαθημ. Κατεύθ. Γ΄ Λυκείου, 2010δ]

Θέμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{10-x} + \sqrt{x^2-100}$

Να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{x\to 10} f(x)$

Προβληματισμός

Μετά τη διδασκαλία της έννοιας του ορίου συνάρτησης σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$, σε τμήμα μαθηματικών κατεύθυνσης γ΄ λυκείου, τέθηκε προς τους μαθητές το παραπάνω θέμα, και ένας από αυτούς έδωσε την επόμενη απάντηση:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 10} f(x) &= \lim_{x\to 10}\left(\sqrt{10-x} + \sqrt{x^2-100}\right) \\
&= \lim_{x\to 10}\sqrt{10-x} + \lim_{x\to 10}\sqrt{x^2-100} \\
&= \sqrt{10-10} + \sqrt{100-100} = 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

Ερωτήματα

Με αφορμή την απάντηση αυτή ο καθηγητής ζήτησε από τον ίδιο μαθητή να βρεί και το πεδίο ορισμού της f. Τι πιστεύετε ότι ήθελε να ελέγξει ακριβώς ο καθηγητής με το συγκεκριμένο ερώτημα;

Ας δούμε όμως και κατά πόσον το ίδιο το ερώτημα, όπως ακριβώς διατυπώθηκε, είναι μαθηματικά αποδεκτό: Οποιαδήποτε συζήτηση περί του ορίου μιας συνάρτησης f σε κάποιο x_0 προϋποθέτει ότι το πεδίο ορισμού της εν λόγω συνάρτησης περιέχει ένα τουλάχιστον ανοικτό διάστημα με ένα άκρο το x_0. Και δεδομένης αυτής της προϋπόθεσης (το όριο να είναι καλώς ορισμένο) μπορούμε έπειτα να αναζητήσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, το οποίο φυσικά μπορεί να υπάρχει (και να το βρούμε) ή να μην υπάρχει. Υπ' αυτήν λοιπόν την έννοια το παραπάνω ερώτημα μάλλον θα έπρεπε να διατυπώνεται διαφορετικά.

Ποια θα έπρεπε να ήταν η διατύπωση του ερωτήματος, έτσι ώστε να ζητείται με σαφήνεια (και κατά τρόπο μαθηματικά ορθό) αυτό ακριβώς που ο καθηγητής ήθελε να ελέγξει;

...