ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ (1)

Του Δημητρίου Α. Ντρίζου
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών

Τα παρακάτω θέματα αποτελούνται από μια σειρά βασικών ερωτημάτων (:άμεσες συνέπειες ιδιοτήτων), κάποια από τα οποία συμπεριλαμβάνονται σχεδόν σ' όλα τα βιβλία αναφοράς Μιγαδικών Αριθμών. Τα κριτήρια για την επιλογή τους σ' αυτή την παρουσίαση σχετίζονται με το βαθμό της διδακτικής τους συμβολής στην επισήμανση και στον έλεγχο, σ' ένα πρώτο στάδιο, της εμπέδωσης των ιδιοτήτων του μέτρου, των συζυγών μιγαδικών αριθμών και της "γεωμετρίας" των εικόνων των μιγαδικών αριθμών.

ΘΕΜΑ 1^0

Για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 να αποδειχτεί ότι:

α. $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{z_1}\cdot z_2)$

β. $|z_1-z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{z_1}\cdot z_2)$

γ. $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$ *:Βασική άσκηση του σχολικού βιβλίου,σελ.101.*

δ. $|z_1+z_2|^2 - |z_1-z_2|^2 = 4\,\mathrm{Re}(\overline{z_1}\cdot z_2)$

ε. Αν $z^2 = z_1\cdot z_2$ τότε $\left|\dfrac{z_1+z_2}{2}+z\right| + \left|\dfrac{z_1+z_2}{2}-z\right| = |z_1|+|z_2|$ *:Παν. Εξετ. Β΄ Λυκ., 1979.*

στ. Αν z_1, z_2 μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε

$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2|z_1^2 - z_2^2|$, να αποδειχτεί ότι ο $\dfrac{z_1}{z_2}$ είναι φανταστικός.

ζ. Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε $(z_1+z_2)^\nu = (z_1-z_2)^\nu$, όπου ν θετικός ακέραιος διαφορετικός του 1, να αποδειχτεί ότι ο $\overline{z_1}\cdot z_2$ είναι φανταστικός.

Σχόλιο:
Οι ισότητες που διατυπώνονται στα ερωτήματα **α.** έως και **δ.** αποτελούν άμεσες συνέπειες των ιδιοτήτων του μέτρου και των συζυγών μιγαδικών αριθμών. Όσον αφορά δε το **ε.**, αυτό αποτελεί εφαρμογή του **γ.** και η απόδειξή του στηρίζεται στην ιδιότητα: Δυο θετικοί αριθμοί είναι ίσοι αν και μόνο αν είναι ίσα τα τετράγωνά τους.

ΘΕΜΑ 2^0

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, z_3 ισχύουν

- $z_1+z_2+z_3=0$ και
- $|z_1|=|z_2|=|z_3|=k$, όπου $k>0$, να αποδειχτεί ότι:

α. $|z_1+z_2|^2 = 2k^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$ και $|z_1-z_2|^2 = 2k^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$

β. $|z_1+z_2| = |z_2+z_3| = |z_3+z_1| = k$

γ. $\mathrm{Re}(z_1\cdot\overline{z_2}) = \mathrm{Re}(z_2\cdot\overline{z_3}) = \mathrm{Re}(z_3\cdot\overline{z_1}) = -\dfrac{k^2}{2}$

δ. $|z_1-z_2| = |z_2-z_3| = |z_3-z_1| = k\sqrt{3}$

ε. $|z_1z_2 - z_2z_3| = |z_2z_3 - z_3z_1| = |z_3z_1 - z_1z_2| = k^2 \cdot \sqrt{3}$

στ. $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$

ζ. $z_1^{\ 3} = z_2^{\ 3} = z_3^{\ 3} = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$

Ως εφαρμογή του ερωτήματος **ζ.**, να αποδειχτεί ότι: $z_1^{\ 2008} + z_2^{\ 2008} + z_3^{\ 2008} = 0$

Σχόλιο:
Να δοθεί γεωμετρική υπόσταση στις ισότητες **δ.** και **ε.** και να συνδεθεί διδακτικά, αν αυτό είναι εφικτό από άποψη χρόνου, με τα κανονικά πολύγωνα από την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

ΘΕΜΑ 3^0

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w, με $z \cdot w \neq 0$, ισχύουν:

- $|z|^4 = \left|z^4 + \dfrac{12i}{z}\right|$ και
- $|w|^4 = \left|w^4 - \dfrac{12}{w^2}\right|$ τότε

α. Να αποδειχτεί ότι: $\operatorname{Im}(z^5) = -6$ και $\operatorname{Re}(w^6) = 6$

β. Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός για τον οποίο: $z^5 = w^6$.

Σχόλιο:
Το θέμα να αντιμετωπιστεί διδακτικά με δυο τρόπους:
Πρώτον, στο πλαίσιο της "γεωμετρίας" των εικόνων των μιγαδικών αριθμών και δεύτερον, αλγεβρικά.

ΘΕΜΑ 4^0

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν:

- $z + w = 9$ και
- $|z| = |w| = 5$, να αποδειχτεί ότι:

α. $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{w} = \dfrac{9}{25}$

β. $\operatorname{Re}(z\overline{w}) = \dfrac{31}{2}$

Σχόλιο:
Το 4^0 θέμα θα μπορούσε να συμπληρωθεί με το ερώτημα:
Να βρεθούν οι z και w. (Αποτ.: $9/2 \pm \sqrt{19}/2\,i$)

ΘΕΜΑ 5^0 (Σχετίζεται με το 4^0 θέμα σε συνδυασμό με το σχόλιο)

Αν z, w μιγαδικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε:

- $\operatorname{Im}(z) \cdot \operatorname{Im}(w) \neq 0$ και
- Οι $z + w$, $z \cdot w$ είναι πραγματικοί αριθμοί,

να αποδειχτεί ότι οι z, w είναι συζυγείς.

ΘΕΜΑ 6^0

α. Στο μιγαδικό επίπεδο να περιγραφεί γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in R$, για τους οποίους ισχύει: $1 \le |z - 3 + 3i| < 3$

β. Καθώς ο z μεταβάλλεται έτσι, ώστε $|z - 3 + 3i| = 1$, να βρεθεί:

(i) Η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση $|z + 1 - i|$

(ii) Εκείνος από τους z για τον οποίο η παράσταση $|z + 1 - i|$ γίνεται ελάχιστη.

ΘΕΜΑ 7^0

Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο: $|z + 1| = |z + i| = |z|$.

Σχόλιο:

Το θέμα να αντιμετωπιστεί διδακτικά με δυο τρόπους:
Πρώτον, στο πλαίσιο της "γεωμετρίας" των εικόνων των μιγαδικών αριθμών και δεύτερον, αλγεβρικά.

ΘΕΜΑ 8^0

Αν z μιγαδικός, να αποδειχτεί ότι: $|z| = |z + 1| = 1$, αν και μόνο αν $z^2 + z + 1 = 0$.

ΘΕΜΑ 9^0

Αν ισχύει $\left|\dfrac{z_1 - ki}{z_1 + ki}\right| + \left|\dfrac{z_2 - ki}{z_2 + ki}\right| + \left|\dfrac{z_3 - ki}{z_3 + ki}\right| < 2$, όπου k κάποιος θετικός πραγματικός αριθμός, τότε να αποδειχτεί ότι ένας το πολύ από τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, z_3 μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός.

Μια λύση του $9^{ου}$ θέματος, στο πλαίσιο της "γεωμετρίας" των μιγαδικών αριθμών.

Ισχυριζόμαστε ότι δύο από τους z_1, z_2, z_3 είναι πραγματικοί αριθμοί. Έστω, για παράδειγμα, πως $z_1, z_2 \in R$. Τότε οι εικόνες των z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία του άξονα $x'x$ των πραγματικών αριθμών, οπότε θα ισαπέχουν από τις εικόνες των ki και $-ki$, γιατί ο άξονας $x'x$ είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος που έχει άκρα τις εικόνες των ki και $-ki$. Άρα $\left|\dfrac{z_1 - ki}{z_1 + ki}\right| = 1$ και $\left|\dfrac{z_2 - ki}{z_2 + ki}\right| = 1$

(Να γίνει σχετικό σχήμα). Τότε όμως θα είχαμε $\left|\dfrac{z_1 - ki}{z_1 + ki}\right| + \left|\dfrac{z_2 - ki}{z_2 + ki}\right| + \left|\dfrac{z_3 - ki}{z_3 + ki}\right| \ge 2$, που είναι άτοπο.

Σχόλιο:

Το παραπάνω θέμα να συνδεθεί διδακτικά με την Εφαρμογή 1., σελ.99, του σχολικού βιβλίου. Επίσης, έχει ενδιαφέρον, το θέμα να λυθεί και αλγεβρικά στο πλαίσιο της ιδιότητας: Οι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί έχουν ίσα μέτρα.

ΘΕΜΑ 10^0

Αν z_1, z_2, z_3, z_4 είναι μιγαδικοί αριθμοί ανά δύο διάφοροι μεταξύ τους και δύο από τους αριθμούς $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}, \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_4}, \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_4}$ είναι φανταστικοί, να αποδειχτεί ότι και ο τρίτος είναι φανταστικός.

[Το θέμα αυτό παρουσιάζεται σε διάφορα βιβλία Άλγεβρας για τη Γ΄ Λυκείου. Ενδεικτική αναφορά: (1993).Δ. Γ. Κοντογιάννης, Άλγεβρα Ι, σελ. 296, Αθήνα: Εκδόσεις Περίγραμμα].

ΘΕΜΑ 11^0

Αν για τους μη μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

- $z \neq w$ και
- $z^2 + w^2 = z \cdot w$

να αποδειχτεί ότι:

α. $|z| = |w|$

β. Στο μιγαδικό επίπεδο, οι εικόνες των z, w και η αρχή των αξόνων σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

ΘΕΜΑ 12^0

Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z και w. Να αποδειχτεί ότι:

α. Αν ο $w\bar{z}$ είναι πραγματικός, τότε ο αριθμός $\frac{w}{z}$ είναι πραγματικός και αντίστροφα.

β. Αν ο $w\bar{z}$ είναι φανταστικός, τότε ο $\frac{w}{z}$ είναι φανταστικός και αντίστροφα.

γ. Αν ο $\frac{w}{z}$ είναι φανταστικός, τότε οι διανυσματικές ακτίνες των z και w είναι κάθετες και αντίστροφα.

ΘΕΜΑ 13^0

α. Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z και w. Να αποδειχτεί ότι, αν ο $w\bar{z}$ είναι πραγματικός, τότε οι εικόνες των z, w και η αρχή των αξόνων είναι σημεία συνευθειακά και αντίστροφα.

β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

- $|z| = |w|$ και
- $z \neq iw$,

να αποδειχτεί ότι οι εικόνες των μιγαδικών $u = (z + iw)^{2008}$, $v = (z - iw)^{2008}$ και η αρχή των αξόνων είναι σημεία συνευθειακά.