ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Του Δημητρίου Α. Ντρίζου
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών

Τα θέματα που παρουσιάζονται εδώ είναι εντελώς ενδεικτικά και δεν συνιστούν μια συλλογή αντιπροσωπευτικών θεμάτων. Απλά, ορισμένα από αυτά έχουν επιλεγεί επειδή προσφέρονται στην ανάπτυξη κάποιων συγκεκριμένων απόψεων που αφορούν μεθόδους Ευρετικής στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

ΘΕΜΑ 1^0

Αν ο θετικός ακέραιος a ικανοποιεί τις συνθήκες:
$a|(3n+234)$ και $a|(4n-357)$, όπου n θετικός ακέραιος με $90 \le n \le 591$,
να αποδειχτεί ότι:

α. $a|2007$

β. $a \le \frac{7}{2}n - \frac{123}{2}$

ΘΕΜΑ 2^0

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy ένα μεταβλητό σημείο $M(x,y)$ ικανοποιεί την ισότητα $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} + \frac{7}{9}(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}) = 0$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων και $A(3,0)$, $B(-3,0)$ είναι σημεία του επιπέδου αυτού.

α. Να αποδειχτεί ότι το σημείο M κινείται στον κύκλο με εξίσωση την $x^2 + y^2 = 16$.

β. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του παραπάνω κύκλου , οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία με εξίσωση $x + y = 0$.

ΘΕΜΑ 3^0

Δίνεται η εξίσωση: $(x-\lambda+6)^2 + (y-\frac{2\lambda}{3})^2 = -\lambda^2 + 8\lambda - 12$, όπου $\lambda \in R$.

α. Τι παριστάνει στο επίπεδο Oxy η εξίσωση, όταν $\lambda = 2$ ή $\lambda = 6$;

β. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για οποιαδήποτε τιμή του λ από το διάστημα $(2,6)$.

γ. Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων, καθώς το λ μεταβάλλεται στο διάστημα $(2,6)$.

ΘΕΜΑ 4^0

Ένας θετικός ακέραιος διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 3, ενώ διαιρούμενος με το 6 δίνει υπόλοιπο 5. Ποιο υπόλοιπο δίνει ο ίδιος θετικός ακέραιος αν διαιρεθεί με το 12 ;

Λύση
Αν ν ο θετικός ακέραιος, τότε: $\nu = 4\kappa + 3$ και $\nu = 6\lambda + 5$, όπου κ, λ θετικοί ακέραιοι. Επομένως: $4\kappa + 3 = 6\lambda + 5 \Rightarrow 4\kappa - 6\lambda = 2 \Rightarrow 2\kappa - 3\lambda = 1$.Ο ακέραιος λ αποκλείεται να είναι άρτιος, γιατί διαφορετικά η σχέση $2\kappa - 3\lambda = 1$ αποτελεί άτοπο (:άρτιος=περιττός).
Επομένως λ περιττός, δηλαδή $\lambda = 2\rho + 1$ όπου ρ θετικός ακέραιος. Τότε $\nu = 6\lambda + 5 = 6 \cdot (2\rho + 1) + 5 = 12\rho + 11$. Οπότε το ζητούμενο υπόλοιπο είναι 11.

ΘΕΜΑ 5^0

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους:

$$\left(x^2 - 5x + 3\right)^2 - 3 \cdot \left(x^2 - 5x + 3\right) = 3 \cdot \left(x - 1\right)$$

*[Μια λύση του θέματος αυτού δίνουμε στο: (Νοέμ. 2005). **Το φ**, Περιοδικό επικοινωνίας και διαλόγου στα Μαθηματικά, Υπεύθ. εκδ. Β. Ε. Βισκαδουράκης, τχ.2, σελ.84].*

Ανάλογο θέμα
Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων τομής της καμπύλης
$y = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1$ με τον άξονα $x'x$.

Σχόλιο:
Το **5^0 ΘΕΜΑ** προτείνεται να αντιμετωπιστεί με δύο τρόπους:
α. Στο πλαίσιο της ισότητας πολυωνύμων και
β. Με την εφαρμογή γνωστών ταυτοτήτων και της παραγοντοποίησης από την Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου.
(Μια μικρή συζήτηση σχετική με τα υπέρ και τα κατά των δύο τρόπων λύσης, ίσως να είχε κάποιο μεθοδολογικό ενδιαφέρον. Θα μπορούσε εδώ το σχήμα του Horner να μας βοηθήσει ;).

ΘΕΜΑ 6^0

Να αποδειχτεί ότι το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών θετικών ακεραίων δεν μπορεί να είναι τετράγωνο ακεραίου αριθμού.

Πρώτη πρόταση διδασκαλίας
Θα αντιμετωπίσουμε το **6^0 ΘΕΜΑ** στο πλαίσιο των απόψεων, περί της κατευθυνόμενης διδασκαλίας, του G. Polya, όπου οι μαθητές:
(α) πειραματίζονται και παρατηρούν,
(β) επισημαίνουν έναν τύπο, μια κανονικότητα (ομοιομορφία),
(γ) αναπτύσσουν μια εικασία, και
(δ) ελέγχουν - αποδεικνύουν την εικασία αυτή.

Πείραμα –Παρατηρήσεις:

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$

$4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$

Παρατηρούμε ότι:
$$\begin{aligned} 24 &= 25 - 1 = 5^2 - 1 \\ 120 &= 121 - 1 = 11^2 - 1 \\ 360 &= 361 - 1 = 19^2 - 1 \\ 840 &= 841 - 1 = 29^2 - 1 \end{aligned}$$

Επισήμανση κανονικότητας (ομοιομορφίας):

Το γινόμενο των τεσσάρων πρώτων διαδοχικών τετράδων θετικών ακεραίων μας δίνει τετράγωνο θετικού ακεραίου μειωμένου κατά 1.

Εικασία:

$\nu \cdot (\nu+1) \cdot (\nu+2) \cdot (\nu+3) = \kappa^2 - 1$, όπου ν και κ θετικοί ακέραιοι.

Έλεγχος – Απόδειξη της εικασίας:

$\nu \cdot (\nu+1) \cdot (\nu+2) \cdot (\nu+3) =$

$[\nu \cdot (\nu+3)] \cdot [(\nu+1) \cdot (\nu+2)] =$

$(\nu^2 + 3\nu) \cdot [(\nu^2 + 3\nu) + 2] =$

$(\nu^2 + 3\nu)^2 + 2 \cdot (\nu^2 + 3\nu) =$

$(\nu^2 + 3\nu)^2 + 2 \cdot (\nu^2 + 3\nu) + 1^2 - 1 =$

$[(\nu^2 + 3\nu) + 1]^2 - 1$

Δεύτερη πρόταση διδασκαλίας

$\nu \cdot (\nu+1) \cdot (\nu+2) \cdot (\nu+3) = (\nu^2 + 3\nu)^2 + 2 \cdot (\nu^2 + 3\nu) \cdot 1$

Ισχύει: $(\nu^2 + 3\nu)^2 < (\nu^2 + 3\nu)^2 + 2 \cdot (\nu^2 + 3\nu) \cdot 1 < [(\nu^2 + 3\nu) + 1]^2$

Επομένως: $(\nu^2 + 3\nu)^2 < \nu \cdot (\nu+1) \cdot (\nu+2) \cdot (\nu+3) < [(\nu^2 + 3\nu) + 1]^2$

Η τελευταία σχέση μας λέει ότι ο αριθμός $\nu \cdot (\nu+1) \cdot (\nu+2) \cdot (\nu+3)$ βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών τετραγώνων. Οπότε ο αριθμός $\nu \cdot (\nu+1) \cdot (\nu+2) \cdot (\nu+3)$ αποκλείεται να ισούται με τετράγωνο θετικού ακεραίου.

Σχόλια:

α. Το **6^0 ΘΕΜΑ** να προταθεί προς λύση μετά την διαπραγμάτευση των ασκήσεων **5.(i)** και **3.** της Β΄ ΟΜΑΔΑΣ, σελ. 150, του σχολικού βιβλίου Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου.

β. Πέραν των δύο παραπάνω προτάσεων διδασκαλίας, σχετικά με το **6^0 ΘΕΜΑ, δ**είτε και το:
(2004).WACLAW SIERPINSKI,
250 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΡΙΘΜΩΝ,
σελ. 113, πρόβλημα 5/173, Μτφ. Στράτος Μάκρας, Αθήνα: Εκδόσεις Κάτοπτρο.

<u>ΘΕΜΑ 7^0</u>

Έστω $\vec{\alpha}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{\beta}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{\gamma}=\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}, \vec{\delta}=\overrightarrow{\mathrm{O\Delta}}$ και $\vec{\varepsilon}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ διανύσματα του επιπέδου διαφορετικά μεταξύ τους τέτοια, ώστε:

- $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=|\vec{\delta}|=|\vec{\varepsilon}|=1$ και
- $\vec{\delta}+\vec{\varepsilon}\neq\vec{0}$

όπου O σημείο αναφοράς.
Να αποδείξετε ότι:

α) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\beta}+\vec{\gamma}|=|\vec{\gamma}+\vec{\alpha}|=1$

β) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=-\dfrac{1}{2}$

γ) $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\beta}-\vec{\gamma}|=|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|=\sqrt{3}$

δ) Τα διανύσματα $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$ και $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ είναι κάθετα.

ε) Αν φ είναι η γωνία των διανυσμάτων $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ και $(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ και ω είναι η γωνία των διανυσμάτων $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$ και $(\vec{\beta}-\vec{\gamma})$, τότε συνφ = συνω $=-\dfrac{1}{2}$

στ) $|\vec{\delta}-\vec{\varepsilon}|<2$

Σχόλιο:
Το **7^0 ΘΕΜΑ**, αν είναι εφικτό από άποψη χρόνου, να συνδεθεί διδακτικά με τα κανονικά πολύγωνα από την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

<u>ΘΕΜΑ 8^0</u>

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τέτοια, ώστε:

- $|\vec{\alpha}-3\vec{\beta}|=\sqrt{3}$ και $|\vec{\alpha}+3\vec{\beta}|=1$
- Η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ είναι 30°.

Να υπολογίσετε:

1) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$
2) Τα $|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\beta}|$
3) Το συνφ όπου φ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

<u>ΘΕΜΑ 9^0</u>

9.1. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ που κινείται στην υποτείνουσα ΒΓ. Από το Μ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΜΚ και ΜΛ προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, όπου Κ σημείο της πλευράς ΑΒ και Λ σημείο της πλευράς ΑΓ. Να προσδιοριστεί η θέση του Μ στη ΒΓ, ώστε το μήκος του τμήματος ΚΛ να γίνεται ελάχιστο.

9.2. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ που κινείται στην πλευρά ΒΓ. Από το Μ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΜΚ και ΜΛ προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, όπου Κ σημείο της πλευράς ΑΒ και Λ σημείο της πλευράς ΑΓ. Να προσδιοριστεί η θέση του Μ στη ΒΓ, ώστε το μήκος του τμήματος ΚΛ να γίνεται ελάχιστο.

9.3. <u>(Προαιρετικό - Ερευνητικό)</u>

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ που κινείται στην πλευρά ΒΓ. Φέρνουμε τα τμήματα ΜΚ και ΜΛ, όπου Κ σημείο της πλευράς ΑΒ και Λ σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοια, ώστε $\angle \mathrm{BKM} = \angle \mathrm{M\Lambda\Gamma} = \angle \omega$, όπου $\angle \omega$ γωνία με το ίδιο σταθερό μέτρο για οποιαδήποτε θέση του Μ.

Να προσδιοριστεί η θέση του Μ στη ΒΓ, ώστε το μήκος του τμήματος ΚΛ να γίνεται ελάχιστο.

*[Μια λύση του **9.3.**,δίνουμε στο: (Απρίλιος 2004). **Απολλώνιος**, Περιοδικό του Παρ/τος Ημαθίας της Ε.Μ.Ε., τχ. 3, σσ. 121-123].*

Σχόλιο:

Τα **9.1.** και **9.2.** είναι γνωστά προβλήματα που εντάσσονται στην ύλη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που διδάσκεται στην Α΄ Λυκείου. Προτείνονται εδώ, επειδή απλά προσφέρονται στην επισήμανση και αξιοποίηση, στην πράξη, της διδακτικής ενέργειας: Διαδικασία γενίκευσης προβλήματος με διαδοχικές μεταβολές των υποθέσεων, διατηρώντας το ίδιο ζητούμενο (*Προσομοίωση στην εργασία μαθηματικού ερευνητή*).