ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣ/ΤΩΝ
ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ
Π/ΘΜΙΑΣ & Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΓΡΑΦΕΙΟ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΣΥΜΒΟΥΛΩΝ
Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΤΡΙΚΑΛΩΝ
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Δημήτριος Ντρίζος, M.Ed.
Μ. Μπότσαρη 2 - 42100 ΤΡΙΚΑΛΑ
Αρ. γραφ. 307 - Τηλ. 24310-46495, Φαξ 24310-46461
Ηλεκτρ. Ταχ.: grss@dide.tri.sch.gr

Τρίκαλα, 16 Σεπτεμβρίου 2008
Αριθ. πρωτ. 207

ΠΡΟΣ
Τους καθηγητές Μαθηματικών των Λυκείων
Ν. Τρικάλων & Καρδίτσας

ΚΟΙΝΟΠΟΙΗΣΗ
- Περ/κό Δ/ντή Εκπ/σης Θεσσαλίας,
  κ. Α. Χαδούλη
- Προϊστάμενο επιστ/κής – παιδ/κής καθοδήγησης,
  κ. Γ. Πατελοδήμο

ΚΑΠΟΙΕΣ ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΗΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ[1]

Του **Δημητρίου Α. Ντρίζου**
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών

1. Εισαγωγή

Όπως γνωρίζουμε, στο κεφάλαιο1. της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου παρουσιάζονται υπό μορφή επαναλήψεων και συμπληρώσεων οι πλέον βασικές έννοιες, ιδιότητες και προτάσεις που αναφέρονται στους πραγματικούς αριθμούς. Μάλιστα, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε χωρίς υπερβολή, πως η ουσιαστική κατανόηση και η εμπέδωση αυτού του τμήματος της ύλης αποτελεί μία βασική προϋπόθεση για την καλή περαιτέρω *μαθηματική πορεία του μαθητή*. Όμως, δεν πρέπει να παραβλέπουμε το γεγονός πως η συγκεκριμένη ύλη έχει συζητηθεί, αλλά σε ένα άλλο επίπεδο, και στην Γ΄ Γυμνασίου. Για το λόγο αυτό, οι όποιες προσωπικές σας εξειδικεύσεις –σχετικά με την κατανομή των προβλεπόμενων διδακτικών ωρών ανά παράγραφο–, πρέπει να κινούνται στο πλαίσιο ενός ρεαλιστικού και καλά οργανωμένου προγραμματισμού, ο οποίος δεν πρέπει, τελικά, να δημιουργεί εμπόδια στην ολοκλήρωση της διδασκαλίας της προβλεπόμενης διδακτέας ύλης.

[1] Οι Σημειώσεις αυτές αποτελούν τμήμα διδακτικού υλικού (επί της θεματικής: *Διδακτική των Μαθηματικών των επιμέρους γνωστικών αντικειμένων ανά τάξη*), που έγραψα για τις ανάγκες μαθημάτων επιμόρφωσης νεοδιόριστων καθηγητών ΠΕ.03, τα οποία πραγματοποιήθηκαν από 25 Αυγούστου έως 5 Σεπτεμβρίου 2008, στο εξακτινωμένο Παράρτημα Τρικάλων του Π.Ε.Κ. Λάρισας.

2. Επισημάνσεις στην παράγραφο 1.1.

2.1. Στην παράγραφο 1.1., σελ. 11 – 12, διατυπώνονται τέσσερις πάρα πολύ βασικές ιδιότητες (:οι 1., 2., 3., 4.) που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο – χωρίς να συνοδεύονται από σχετικές ασκήσεις και εφαρμογές. Και επειδή *τα μαθηματικά δεν εμπεδώνονται με την διατύπωση (μόνον) τελικών συμπερασμάτων*, σας προτείνουμε να εμπλουτίσετε τις εν λόγω ιδιότητες με δικά σας παραδείγματα.
Ενδεικτικά προτείνουμε τα επόμενα παραδείγματα:

Για την ιδιότητα 1., σελ. 11 του σχολικού βιβλίου

1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y για τους οποίους:
$4x-y=39$ και $x+y=16$

2. Αν x,y,z είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε: $xy=2$, $yz=4$ και $zx=8$, τότε να βρείτε την τιμή του γινομένου xyz.

Για την ιδιότητα 3., σελ. 12 του σχολικού βιβλίου

Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\left(3+4^5\right)\left(6x-7\right)=2\left(7x-6\right)\left(3+4^5\right)$

ii. $7-7\left(x-1\right)+49^{2008}=7x+7^{4016}$

Για την ιδιότητα 4., σελ. 12 του σχολικού βιβλίου

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους:

i. $x\left(1-x^2\right)\left(x^2+4x+4\right)\left(3-4^5\right)=0$

ii. $\left(6+7^8\right)\left(9-x^2\right)\left(9-x\right)^2\neq 0$

Σχόλιο: Τα παραπάνω ερωτήματα –πέραν του κεντρικού τους στόχου, για τον οποίο διατυπώθηκαν– δίνουν το έναυσμα για μία συζήτηση σχετικά με το περιεχόμενο των πρώτων μαθημάτων της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου και τη διασύνδεσή τους με τα Μαθηματικά της Γ΄ Γυμνασίου.

2.2. Κατά τη διδασκαλία των αξιοσημείωτων ταυτοτήτων, να επισημανθεί η χρησιμότητα της ταυτότητας της διαφοράς τετραγώνων σε υπολογισμούς κατάλληλων γινομένων, όπως: $99\cdot 101, 98\cdot 102, 84\cdot 76$ (άσκηση 3 στην σελ. 22). Επίσης, να υπογραμμιστεί ιδιαίτερα ο λειτουργικός ρόλος της παραγοντοποίησης αλγεβρικών παραστάσεων, *πρώτον*, στην απλοποίηση κλασμάτων και *δεύτερον*, στην επίλυση κάποιων εξισώσεων.

2.3. Στις επόμενες (*μαθηματικές*) *προτάσεις* να τονιστεί με έμφαση το ακριβές μαθηματικό νόημα που αποδίδουμε στις λέξεις "**και**", "**ή**" και στα σύμβολα (σχέσεις) της ισότητας "$=$" και της ισοδυναμίας "$\Leftrightarrow$".

1. $a\cdot b=0\Leftrightarrow a=0$ **ή** $b=0$

2. $a\cdot b\neq 0\Leftrightarrow a\neq 0$ **και** $b\neq 0$

3. $a^2+b^2=0\Leftrightarrow a=0$ **και** $b=0$

4. Καθώς για όλους τους πραγματικούς αριθμούς a,b ισχύει $a^2+b^2\geq 0$, να επισημανθεί ιδιαίτερα η "αλήθεια" της ισοδυναμίας $a^2+b^2>0\Leftrightarrow a\neq 0$ **ή** $b\neq 0$.

Κατά την διδασκαλία και επισήμανση των παραπάνω προτάσεων-ιδιοτήτων, να καταβληθεί προσπάθεια ώστε να εμπεδωθεί από τους μαθητές –με την συμβολή (και) παραδειγμάτων– το διαφορετικό μαθηματικό νόημα των συμβόλων της ισότητας "$=$" και της ισοδυναμίας "$\Leftrightarrow$", καθώς έχει παρατηρηθεί πως ένας σημαντικός αριθμός μαθητών συγχέει τον λειτουργικό ρόλο των συμβόλων αυτών.

2.4. Να διατυπωθούν και να συζητηθούν κατάλληλα παραδείγματα διαμέσου των οποίων αναδεικνύεται η ουσιαστική διαφορά μιας μαθηματικής πρότασης της μορφής: "**Αν** (Π_1) **τότε** (Π_2)" από την: "Ισχύει (Π_1) **αν και μόνον αν** ισχύει (Π_2) ". Στο σημείο αυτό δίνουμε και την αντίστοιχη συμβολική "γραφή" καθεμιάς των προτάσεων αυτών και ακολουθεί συζήτηση, στο πλαίσιο της επικρατούσας σήμερα άποψης για τη χρήση των συμβόλων της μαθηματικής λογικής στην απόδοση μαθηματικών προτάσεων.

2.5. Τέλος, έχει καταγραφεί πως ***οι μέθοδοι απόδειξης μαθηματικών προτάσεων*** εμπεδώνονται καλύτερα, όταν αυτές παρουσιάζονται κατά την ροή των μαθημάτων μας, με την ευκαιρία επίλυσης χαρακτηριστικών ασκήσεων και εφαρμογών του σχολικού βιβλίου και όχι στο πλαίσιο μιας ανεξάρτητης συνεκτικής ενότητας με μόνο θέμα την θεωρητική τους παρουσίαση.

3. Ορισμένες βασικές προτάσεις και παραδείγματα Αξιοσημείωτες εφαρμογές και ασκήσεις του κεφαλαίου 1. […ταυτότητες, ανισο(ταυτό)τητες κ.ά.]

1. Να αποδείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς a, b ισχύει:

i. $a^2 + b^2 \geq 2ab$

ii. $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$

2. Να αποδείξετε ότι:

i. Αν $a > 0$, τότε $a + \frac{1}{a} \geq 2$

Εφαρμογή: Αν a, b είναι ομόσημοι, τότε: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

ii. Αν $a < 0$ τότε $a + \frac{1}{a} \leq -2$

3. Να αποδείξετε ότι:

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$: <u>ταυτότητα του Lagrange</u>

Εφαρμογή: Ισχύει $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$: <u>ανίσωση του Schwartz</u>

4*. Να αποδείξετε ότι:

i. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$,

Εφαρμογή: Αν οι a, b, c είναι θετικοί τότε ισχύει $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$

ii. Αν $a+b+c=0$ τότε $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$: <u>ταυτότητες του Euler</u>

5. Αν a πραγματικός και $\theta > 0$, τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

i. $|a| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq \alpha \leq \theta$

ii. $|a| \geq \theta \Leftrightarrow \alpha \leq -\theta$ ή $a \geq \theta$

6* **.** Αν οι θετικοί αριθμοί a,b,c εκφράζουν τα μήκη των πλευρών τριγώνου ABC, τότε: $|b-c| < a < b+c$, $|a-c| < b < a+c$ και $|a-b| < c < a+b$, τριγωνική ανισότητα

4. Ασκήσεις

1. Αν για τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a,b,x,y ισχύει $ay = bx$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} + \dfrac{b^2}{a^2+b^2} = 1$.

2. Αν $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$ με $abc \neq 0$, $a+b+c=1$ και $a^2+b^2+c^2=1$, να αποδείξετε ότι: $xy+yz+zx=0$.

3. Αν $x^2+y^2=9$, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A=4x+3y$.

4. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x,y ισχύει $x^2-4x+y^2+10y+20=0$, να αποδείξετε ότι $x>y$.

5. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a,b ισχύει $a^2+2b^2-2ab+2a-4b+2 \geq 0$.

6.i. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a για τους οποίους ισχύει:
$(2a-3)^3+(a-2)^3+(5-3a)^3=0 \quad :(1)$

6.ii. Για την ακέραια τιμή του a, που ικανοποιεί την (1), να αποδείξετε ότι η εξίσωση $kx^2-(k+am)x+m=0$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $m \in R$ και $k \neq 0$.

7. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a,b,c ισχύει $\dfrac{l}{a-b} = \dfrac{m}{b-c} = \dfrac{n}{a-c}$, να αποδείξετε ότι: $n=l+m$.

8. Να γράψετε σαν γινόμενο παραγόντων την παράσταση:

$A=a^3+27b^3+8c^3-18abc$

9. Αν a,b,c είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου ABC με $a+b+c=13$, να αποδείξετε ότι:

i. $a^2 < ab+ac$, $b^2 < ab+bc$, $c^2 < ac+bc$

ii. $2(a^2+b^2+c^2) < 169$

10. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους:

$$\left(x^2-5x+3\right)^2-3\left(x^2-5x+3\right)=3\left(x-1\right)$$

11. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα μήκους $\dfrac{\sqrt{2m}}{2}$ και κάθετες πλευρές με μήκη k και l. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{k^4+2ml^2}+\sqrt{l^4+2mk^2}=\dfrac{3m}{2}$.

12. Σε κυβική δεξαμενή ακμής $1m$, εισρέει νερό με σωλήνα παροχής $\Pi_1=20\dfrac{lt}{\sec}$ και ταυτόχρονα εκρέει νερό από τον πυθμένα της δεξαμενής με σωλήνα ελεγχόμενης εκροής $\Pi_2=\lambda\dfrac{lt}{\sec}$, όπου $\lambda\le 20$.

Μετά χρόνο t από την έναρξη του εν λόγω πειράματος, ονομάζουμε V_1 τον όγκο του νερού που έχει εισρεύσει στην δεξαμενή και V_2 τον όγκο του νερού που έχει εκρεύσει από αυτήν.

Να γράψετε:

α. Τα V_1 και V_2 ως συνάρτηση του t.

β. Την εξίσωση που συνδέει τα V_1, V_2 και περιγράφει εκείνη ακριβώς την χρονική στιγμή κατά την οποία η δεξαμενή γεμίζει με νερό.

γ. Να διερευνήσετε την εξίσωση του ερωτήματος β. για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ και έπειτα να ερμηνεύσετε με φυσικό τρόπο (διαισθητικά) τα αποτελέσματα της διερεύνησή σας.

δ. Σε πόσο ακριβώς χρόνο γεμίζει η δεξαμενή, όταν

i. $\lambda=0$, *ii.* $\lambda=10$.

Γενικό σχόλιο: Η επιλογή για διδασκαλία στην τάξη οποιασδήποτε από τις παραπάνω ασκήσεις είναι προφανές πως πρέπει να παίρνει υπόψη, πρωτίστως, το γνωστικό επίπεδο των μαθητών της τάξης – και βεβαίως, να μην δημιουργείται σοβαρό πρόβλημα καθυστέρησης στην προγραμματισμένη ροή της διδασκαλίας σας.

5. Βιβλιογραφικές πηγές

I. Περιοδικά

[1] *Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem*

[2] *Ευκλείδης Β΄ της Ε.Μ.Ε.*

[3] "*Το φ*", άρθρο του Δ. Ντρίζου: "*Το θέμα της εβδομάδας – Μία πρόταση για την Α΄ Λυκείου και όχι μόνο…*", τχ 2^0 (Νοέμβριος 2005), σσ. 84-86., Αθήνα: Έκδοση του Β. Ε. Βισκαδουράκη.

[4] *Ευκλείδης Γ΄*, άρθρο του Σ. Μαρίνη: "*Η Μαθηματική Λογική και η διδασκαλία της*", τχ 67^0 (Ιούλιος-Δεκέμβριος 2007), σσ. 21-41., Αθήνα: Έκδοση της Ε.Μ.Ε.

[5] *Διάσταση*, άρθρο του Β. Γιαννογλούδη: "*Πρωτοβάθμιες παραμετρικές εξισώσεις*" τχ 4^0 (1994), σσ. 71-82., Θεσσαλονίκη: Έκδοση του παραρτήματος της Κεντρικής Μακεδονίας της Ε.Μ.Ε.

II. Βιβλία

[1] Δ. Γ. Κοντογιάννη: "*Ισότητες και ανισότητες στο τρίγωνο*".

[2] Ν. Ζανταρίδης – Κ. Παπαδόπουλος: "*Ανισοτικές σχέσεις και μαθηματικοί διαγωνισμοί*".