

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΕΣ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΕΣ
ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ, ΣΧΟΛΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
(Στο πλαίσιο του βιβλίου της Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, έκδοση 2010)

Του Δημητρίου Ντρίζου
Σχ. Συμβ. Μαθηματικών

Ερωτήσεις

Να χαρακτηρίσετε καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς με την ένδειξη **A**, αν αυτός είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α , και με την ένδειξη **Ψ** σε διαφορετική περίπτωση.

1. $\alpha < 4 \Rightarrow \alpha^2 < 16$

2. $\alpha^2 < 16 \Rightarrow \alpha < 4$

3. $\alpha < 4 \Leftrightarrow \alpha^2 < 16$

4. $-5 < \alpha < 5 \Rightarrow \alpha < 5$

5. $\alpha < 5 \Rightarrow -5 < \alpha < 5$

6. $\alpha < 5 \Leftrightarrow -5 < \alpha < 5$

7. $\alpha \neq 6 \Rightarrow \alpha^2 \neq 36$

8. $\alpha^2 = 36 \Rightarrow \alpha = 6$

9. $\alpha = 6 \Rightarrow \alpha^2 = 36$

10. $\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha^2 = 36$

11. $\alpha > 7 \Rightarrow \alpha^2 > 49$

12. $\alpha^2 > 49 \Rightarrow \alpha > 7$

13. $\alpha < 8 \Rightarrow \alpha \leq 8$

14. $-9\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 0$

Θεωρητικές επισημάνσεις

1. Μία οποιαδήποτε από τις παραπάνω συνεπαγωγές χαρακτηρίζεται ψευδής μόνον όταν υπάρχει (μία τουλάχιστον) τιμή του α η οποία καθιστά αληθή την υπόθεση και ψευδές το συμπέρασμά της.

2. Μία οποιαδήποτε από τις παραπάνω ισοδυναμίες ($p \Leftrightarrow q$) χαρακτηρίζεται αληθής μόνον όταν οι δύο συνεπαγωγές $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ χαρακτηρίζονται αληθείς.

Διδακτική διαχείριση

Για τον χαρακτηρισμό των παραπάνω συνεπαγωγών προτείνεται η συζήτηση στην τάξη να εστιάζεται καταρχήν στην διερεύνηση του ερωτήματος: Μήπως υπάρχει τιμή του a η οποία καθιστά αληθή την υπόθεση και ψευδές το συμπέρασμά της;

Ενδεικτικά ας δούμε κάποιες από τις παραπάνω συνεπαγωγές.

Για την συνεπαγωγή 1:

Αν το a πάρει για παράδειγμα την τιμή -10 , τότε ισχύει $-10 < 4$ ενώ το $(-10)^2$ δεν είναι μικρότερο του 16 .

Άρα η συνεπαγωγή 1 χαρακτηρίζεται με Ψ.

Σχόλιο:

Θα μπορούσε να αντιμετωπίσει κανείς τη συνεπαγωγή 1 και ως εξής: Από την υπόθεση ($a < 4$) περάσαμε στο συμπέρασμα ($a^2 < 16$) τετραγωνίζοντας τα μέλη της ανισότητας $a < 4$, χωρίς να πάρουμε υπόψη μας το πρόσημο των μελών της κ.τ.λ.

Από τους παραπάνω τρόπους διδακτικής διαχείρισης της συνεπαγωγής 1, ο πρώτος εστιάζεται στην επινόηση αντιπαραδείγματος (μια ουσιαστική μαθηματική ικανότητα), ενώ ο δεύτερος στην άμεση χρήση βασικών ιδιοτήτων της διάταξης των πραγματικών αριθμών (εφαρμογή σχετικής θεωρίας).

Για την συνεπαγωγή 4:

Καταρχήν θέτουμε στους μαθητές μας το ερώτημα: Υπάρχει πραγματικός αριθμός μεταξύ των -5 και 5 , χωρίς αυτός να είναι μικρότερος του 5 ;

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι προφανώς αρνητική, οπότε για τους πραγματικούς αριθμούς a με $-5 < a < 5$ η συνεπαγωγή 4 γίνεται αληθής. Για όλους τώρα τους υπόλοιπους πραγματικούς αριθμούς a η υπόθεση $-5 < a < 5$ της συνεπαγωγής 4 γίνεται ψευδής: άρα και σ' αυτήν την περίπτωση (σύμφωνα με σύμβαση της Μαθηματικής Λογικής) δεχόμαστε ότι η συνεπαγωγή 4 είναι πάλι αληθής.

Τελικά, σύμφωνα με τη διατύπωση της ερώτησης, χαρακτηρίζουμε με Α την εν λόγω συνεπαγωγή, αφού πράγματι γίνεται αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς a .

Για την συνεπαγωγή 5:

Θέτουμε το ερώτημα: Υπάρχει αριθμός μικρότερος του 5 , χωρίς αυτός να βρίσκεται μεταξύ των -5 και 5 ;

Και βέβαια υπάρχει για παράδειγμα το -10 . Γι αυτό τη συνεπαγωγή 5 τη χαρακτηρίζουμε με Ψ.

Για την συνεπαγωγή 7:

Με $\alpha = -6$ η υπόθεση γίνεται αληθής και ψευδές το συμπέρασμά της. Άρα η συνεπαγωγή 7 χαρακτηρίζεται με Ψ .

Για την συνεπαγωγή 12:

Με $\alpha = -10$ η υπόθεση γίνεται αληθής και ψευδές το συμπέρασμά της κ.τ.λ.

Παρατήρηση

Αν στο εισαγωγικό κεφάλαιο του βιβλίου της Άλγεβρας Α' Λυκείου παρουσιάζονταν πρώτα η παράγραφος για τα Σύνολα (Ε.2) και αμέσως μετά η παράγραφος Το λεξιλόγιο της Λογικής (Ε.1), τότε ο χαρακτηρισμός των παραπάνω συνεπαγωγών, ως αληθών ή ψευδών, θα μπορούσε να γίνει με βάση και τον επόμενο εποπτικά προφανή συλλογισμό (που συνδέει τα Σύνολα με τη Μαθηματική Λογική):

Έστω $p \Rightarrow q$ μία από τις παραπάνω συνεπαγωγές.

Αν συμβολίσουμε με Υ το σύνολο των $\alpha \in \mathbb{R}$ που καθιστούν αληθή την υπόθεση p της συνεπαγωγής και με Σ το σύνολο των $\alpha \in \mathbb{R}$ που καθιστούν αληθές το συμπέρασμά της q , τότε:

αν το Υ είναι υποσύνολο του Σ , τη συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ τη χαρακτηρίζουμε αληθή, ενώ αν το Υ δεν είναι υποσύνολο του Σ τη συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ τη χαρακτηρίζουμε ψευδή.

Σχόλιο

Ο παραπάνω συλλογισμός αναφέρεται σε συνεπαγωγές με αληθή υπόθεση. Στο πλαίσιο όμως της Μαθηματικής Λογικής αποδεχόμαστε ως αληθείς και τις συνεπαγωγές με ψευδή υπόθεση.

Οι απαντήσεις (χαρακτηρισμοί) όλων των παραπάνω ισχυρισμών

$1 \rightarrow \Psi$	$2 \rightarrow A$
$3 \rightarrow \Psi$	$4 \rightarrow A$
$5 \rightarrow \Psi$	$6 \rightarrow \Psi$
$7 \rightarrow \Psi$	$8 \rightarrow \Psi$
$9 \rightarrow A$	$10 \rightarrow \Psi$
$11 \rightarrow A$	$12 \rightarrow \Psi$
$13 \rightarrow A$	$14 \rightarrow A$