

## **ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (1)** **ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**

Του Δημητρίου Α. Ντρίζου  
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών

### **Ενδεικτικά θέματα**

#### **ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

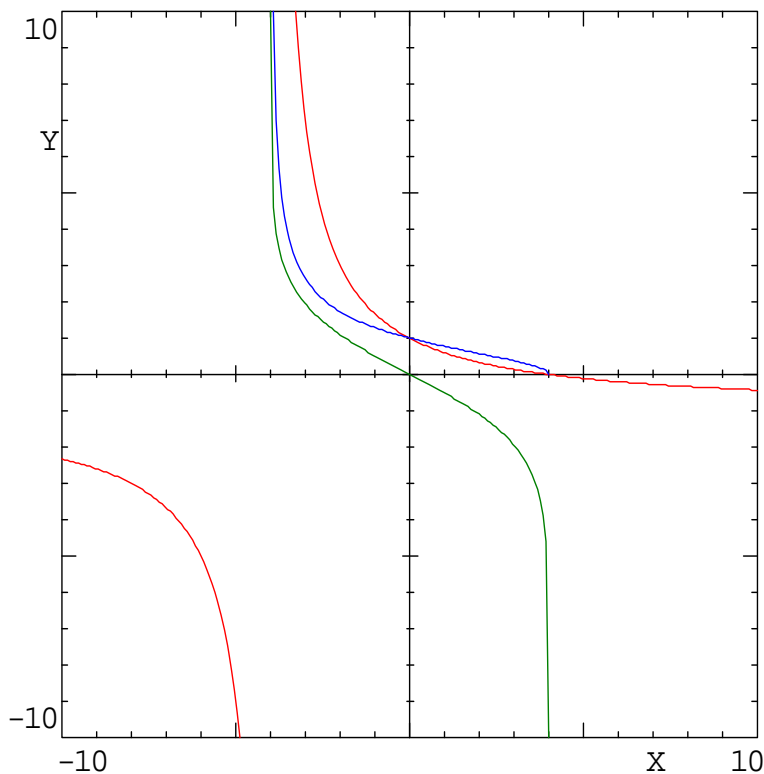
Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{4-x}{4+x}, \quad g(x) = \sqrt{\frac{4-x}{4+x}} \quad \text{και} \quad h(x) = \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right).$$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των  $f, g$  και  $h$ .

β. Αν ονομάσουμε  $A$  το σύνολο των  $x \in \mathbb{R}$  για τα οποία η γραφική παράσταση  $C_h$  της συνάρτησης  $h$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$  των τετμημένων και  $B$  το σύνολο των  $x \in \mathbb{R}$  για τα οποία η  $C_g$  βρίσκεται πάνω από την  $C_f$ , να εξεταστεί αν  $A=B$ .

γ. Να αποδειχτεί ότι η  $h$  αντιστρέφεται και να βρεθεί το πεδίο ορισμού και ο τύπος της συνάρτησης  $h^{-1}(x)$ .



Κόκκινη καμπύλη:  $f(x)$

Μπλε καμπύλη:  $g(x)$

Πράσινη καμπύλη:  $h(x)$

### **ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$  και  $g(x) = x^3 + 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**A.** Να αποδειχτεί ότι:

**α.**  $f(x) = g(x-1) + 3$

**β.** Η  $g$  είναι συνάρτηση περιττή και "1-1"

**B.** Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $a$  και  $\beta$  ισχύουν:

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha + 2004 = 0 \quad \text{και} \quad \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta - 2010 = 0$$

να υπολογιστεί το άθροισμα  $\alpha + \beta$ .

[ Η ιδέα για τη σύνθεση του 2<sup>ου</sup> θέματος βρίσκεται στην άσκηση: "Οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  ικανοποιούν τις εξισώσεις  $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha = 1$ ,  $\beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta = 5$ . Βρείτε το άθροισμα  $\alpha + \beta$  ".

V. Kukushkin: (2001) Περιοδικό  $\square$  UANTUM, Τόμος 8 / Τεύχος 4, σελ.19].

### **ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Θεωρούμε τη γνήσια μονότονη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα:

$$(f(x))^3 + f(x) + x^3 + x = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**α.** Να αποδειχτεί ότι η γραφική παράσταση  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από τα σημεία  $A(1, -1)$  και  $B(-1, 1)$ .

**β.** Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της  $f$ .

**γ.** Να λυθεί η ανίσωση:  $f(-2 + f^{-1}(x^2 - 10)) < 1$

#### **Ανάλογο θέμα**

Για την  $f$ , όπως αυτή ορίστηκε στο 3<sup>ο</sup> θέμα, να ζητηθούν προς απόδειξη:

**α.** Η  $f$  είναι συνάρτηση "1-1".

**β.** Να λυθεί η εξίσωση:  $f(-2 + f^{-1}(\ln^2 x - 10)) = 1$ .