Μία άλλη απόδειξη του τύπου που δίνει τις πραγματικές ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με τη συμβολή της ταυτότητας $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$

Ισχύει: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \Leftrightarrow x\left(x+\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{-\gamma}{\alpha}$, καθώς $\alpha \neq 0$. Θέτοντας $y=x+\frac{\beta}{\alpha}$, η ισότητα $x\left(x+\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{-\gamma}{\alpha}$ γράφεται: $xy=x^2+\frac{\beta}{\alpha}x=\frac{-\gamma}{\alpha}$.

Οπότε $x-y=\frac{-\beta}{\alpha}$ και $xy=\frac{-\gamma}{\alpha}$.

Με αντικατάσταση των $x-y$ και xy στην ταυτότητα $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$ παίρνουμε: $(x+y)^2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\frac{4\gamma}{\alpha}=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{\alpha^2}$ και στην περίπτωση που $\beta^2-4\alpha\gamma \geq 0$,

από την τελευταία προκύπτει: $x+y=\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{|\alpha|}$ ή $x+y=-\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{|\alpha|}$.

Με πρόσθεση κατά μέλη καθεμιάς από τις τελευταίες αυτές ισότητες με την $x-y=\frac{-\beta}{\alpha}$ βρίσκουμε αντιστοίχως: $x=\frac{-\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2|\alpha|}$ ή $x=\frac{-\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2|\alpha|}$,

από τις οποίες καταλήγουμε στις $x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$, καθώς $|\alpha|=\alpha$ όταν $\alpha>0$, ενώ $|\alpha|=-\alpha$ όταν $\alpha<0$. □

Σχόλιο:
Και βέβαια η παραπάνω απόδειξη, που εμπλέκει τις ταυτότητες με τις απόλυτες τιμές και τις τετραγωνικές ρίζες, είναι πιο δύσκολη από την συνήθη που στηρίζεται στη διαδικασία της *συμπλήρωσης τετραγώνου*. Το ενδιαφέρον της παραπάνω μεθόδου απλά συνίσταται στην επισήμανση του ιδιαίτερα λειτουργικού ρόλου κάποιων βασικών ταυτοτήτων ή συνδυασμών τους από την άλγεβρα της Α΄ Λυκείου.

Δ.Ν.