Προτάσεις επί της διδασκαλίας
ορισμένων θεμάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας
(Α΄ Λυκείου)

Του **Δημητρίου Α. Ντρίζου**
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών

Κάποιες προτάσεις και επισημάνσεις εφαρμογών ειδικού ενδιαφέροντος

1. Οι έννοιες του βαρύκεντρου, του ορθόκεντρου, του έγκεντρου και των παράκεντρων τριγώνου, προτείνεται να διδαχτούν διεξοδικά στο πλαίσιο μιας 4-ωρης συνεκτικής διδακτικής ενότητας μετά τη διδασκαλία των παραλληλογράμμων. Στην ενότητα αυτή να συμπεριληφθούν ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου καθώς και οι παρεγγεγραμμένοι κύκλοι τριγώνου. Η εν λόγω ενότητα να υποστηριχτεί στην τάξη από λίγες, αλλά καλά επιλεγμένες βασικές ασκήσεις, που αναδεικνύουν το ουσιώδες και ενισχύουν τη μαθηματική παρατηρητικότητα και τη δημιουργική σκέψη.

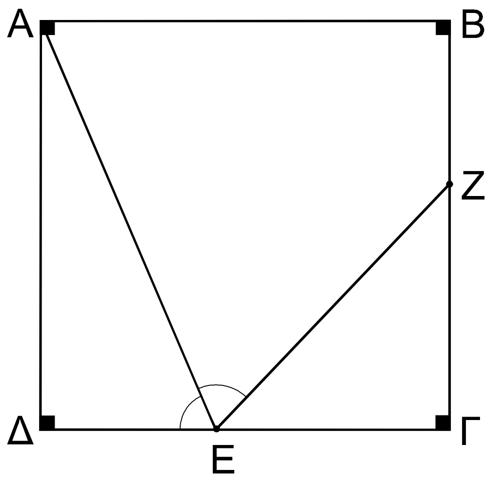
2. Να διδαχτεί με ιδιαίτερη προσοχή η εφαρμογή 2. (βασικό θεωρητικό θέμα) της σελίδας 55 του σχολικού βιβλίου Γεωμετρίας, η οποία αποτελεί ένα βασικό κριτήριο, σύμφωνα με το οποίο χαρακτηρίζεται ένα τρίγωνο ως ισοσκελές.
Επίσης, ως μια καλή δραστηριότητα στην τάξη θα μπορούσε να χαρακτηριστεί η εφαρμογή 4. της σελίδας 56.

3. Να προταθούν για μελέτη στο σπίτι οι εφαρμογές (αξιοσημείωτες βασικές ασκήσεις) της σελίδας 86.

4. Να λυθεί στην τάξη η εξαιρετικά ενδιαφέρουσα, από διδακτικής σκοπιάς, άσκηση 3 από τα Σύνθετα Θέματα της σελίδας 88. Κατά τη λύση της να επισημανθεί με έμφαση το κριτήριο σύμφωνα με το οποίο χαρακτηρίζουμε τρία σημεία ως συνευθειακά. Εν προκειμένω, να αναδειχθεί ο σοβαρός κίνδυνος της έμμεσης θεώρησης του ζητουμένου ως υπόθεσης [Σχετικά μ' αυτό, δείτε προσεκτικά τη "λύση" (!) της εν λόγω άσκησης στη σελίδα 50 του αντιστοίχου Βιβλίου Λύσεων του Ο.Ε.Δ.Β.].

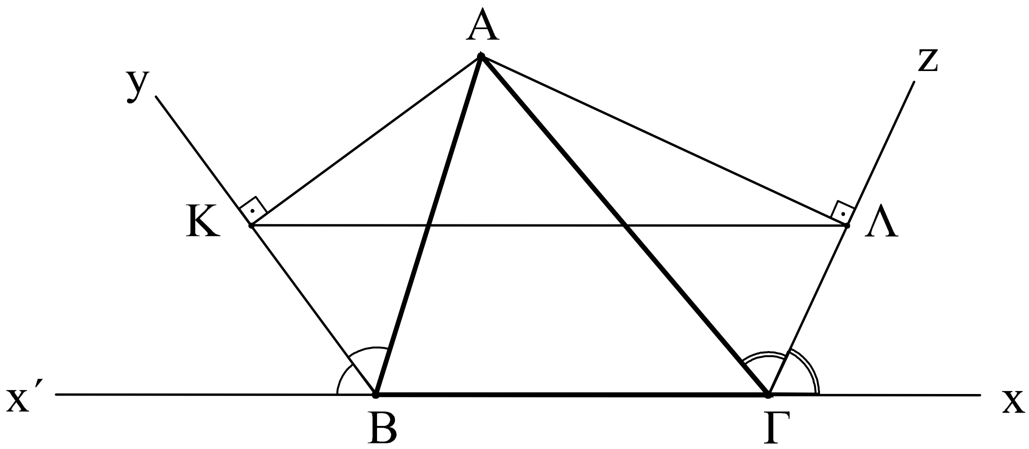
Δύο ασκήσεις για εργασία στην τάξη

1. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε και Ζ πάνω στις πλευρές του ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα, ώστε $\Delta\hat{E}A = Z\hat{E}A$.
Να αποδειχτεί ότι η περίμετρος του τριγώνου ΖΕΓ ισούται με την ημιπερίμετρο του τετραγώνου ΑΒΓΔ.



Σχόλιο:
Η άσκηση 1.εντάσσεται στο πλαίσιο διδασκαλίας της παραγράφου 5.5., σελ. 102. του σχολικού βιβλίου.
[Πηγή: Περιοδικό το **"φ"**, τχ 2^o, (2005), σελ.85 άρθρο Δ. Ντρίζου]

2. Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ και $Βy, Γz$ οι διχοτόμοι των εξωτερικών του γωνιών $ΑΒx'$ και $ΑΓx$ αντίστοιχα.
Αν $Κ$ και $Λ$ είναι οι προβολές της κορυφής $Α$ στις $Βy, Γz$ αντίστοιχα, να αποδειχτεί ότι:
α) Το τμήμα $ΚΛ$ είναι παράλληλο προς την πλευρά $ΒΓ$.
β) Η περίμετρος του τριγώνου $ΑΒΓ$ ισούται με το διπλάσιο του $ΚΛ$.



Σχόλιο:
Η άσκηση 2.εντάσσεται στο πλαίσιο διδασκαλίας της παραγράφου 5.6., σελ. 104. του σχολικού βιβλίου.
[Πηγή: Ιστότοπος mathematica.gr]

Γενίκευση προβλήματος με διαδοχικές μεταβολές των υποθέσεων, διατηρώντας το ίδιο ζητούμενο

Τα θέματα 1.1., 1.2. και 1.3. που ακολουθούν θεωρούνται στο πλαίσιο μιας συνεκτικής ενότητας (επαναληπτικού χαρακτήρα) και μπορούν να αντιμετωπιστούν στην τάξη, εφόσον, βέβαια, οι μαθητές έχουν κατακτήσει πρώτα και το απαιτούμενο θεωρητικό υπόβαθρο.

1.1. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ που κινείται στην υποτείνουσα ΒΓ. Από το Μ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΜΚ και ΜΛ προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, όπου Κ σημείο της πλευράς ΑΒ και Λ σημείο της πλευράς ΑΓ. Να προσδιοριστεί η θέση του Μ στη ΒΓ, ώστε το μήκος του τμήματος ΚΛ να γίνεται ελάχιστο.

1.2. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ που κινείται στην πλευρά ΒΓ. Από το Μ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΜΚ και ΜΛ προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, όπου Κ σημείο της πλευράς ΑΒ και Λ σημείο της πλευράς ΑΓ. Να προσδιοριστεί η θέση του Μ στη ΒΓ, ώστε το μήκος του τμήματος ΚΛ να γίνεται ελάχιστο.

1.3. *(Προαιρετικό - Ερευνητικό)*
Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ που κινείται στην πλευρά ΒΓ. Φέρνουμε τα τμήματα ΜΚ και ΜΛ, όπου Κ σημείο της πλευράς ΑΒ και Λ σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοια, ώστε $\angle ΒΚΜ = \angle ΜΛΓ = \angle \omega$, όπου $\angle \omega$ γωνία με το ίδιο σταθερό μέτρο για οποιαδήποτε θέση του Μ.

Να προσδιοριστεί η θέση του Μ στη ΒΓ, ώστε το μήκος του τμήματος ΚΛ να γίνεται ελάχιστο.

Σχόλια
α. Τα παραπάνω θέματα 1.1. και 1.2. είναι γνωστά προβλήματα που εντάσσονται στην ύλη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που διδάσκεται στην Α΄ Λυκείου. Προτείνονται εδώ, επειδή απλά προσφέρονται στην επισήμανση και αξιοποίηση, στην πράξη, της διδακτικής ενέργειας: **Γενίκευση προβλήματος με διαδοχικές μεταβολές των υποθέσεων, διατηρώντας το ίδιο ζητούμενο**.

β. Μία λύση του 1.3. δίνουμε στο περιοδικό **Απολλώνιος,** (Απρίλιος 2004), τχ. 3, σσ. 121-123, Ημαθία: Παράρτημα της Ε.Μ.Ε.

Αντί επιλόγου
Κάποιες γενικές απόψεις περί των Μαθηματικών και της διδασκαλίας τους
(Από την Εισαγωγή άρθρου προς δημοσίευση στον Ευκλείδη Γ΄)

Είναι γνωστό ότι κάθε μαθηματική θεωρία, αλλά και κάθε κλάδος της μαθηματικής επιστήμης γενικότερα, αποτελείται από ένα σύνολο εννοιών και προτάσεων διατυπωμένων με αυστηρότητα και οργανωμένων με μια ιεραρχική σειρά, στο πλαίσιο της *παραγωγικής συλλογιστικής*. Τι γίνεται όμως όταν μια μαθηματική θεωρία, ή κάποιο τμήμα της, επιλεγεί να αποτελέσει ύλη των μαθηματικών που πρέπει να διδαχτεί στο σχολείο; Βέβαια, τα πράγματα τότε αλλάζουν και προκύπτουν διάφορα ερωτήματα, οι απαντήσεις των οποίων, δυστυχώς, δεν είναι ούτε απλές, αλλά ούτε και μονοσήμαντες. Με ποιόν τρόπο, για παράδειγμα, θα μπορούσε να μεταπλασθεί μια μαθηματική θεωρία για να αποτελέσει ύλη σχολικού εγχειριδίου, όπου αναγνώστες του θα είναι μαθητές; Και, κυρίως, με ποιόν τρόπο οι διδάσκοντες θα μπορούσαν να διαχειριστούν με τον πλέον αποτελεσματικό τρόπο την ύλη αυτή στη διδακτική πράξη; Κατά την άποψή μας, μια διδασκαλία των Μαθηματικών η οποία εστιάζεται και συγχρόνως αρκείται μόνον στην έκθεση μαθηματικών συμπερασμάτων, διατυπωμένων μάλιστα στην τελική τους μορφή –σαν να είναι ήδη και για τους μαθητές μας κάτι το ολοκληρωμένο– δεν μπορεί να προσφέρει ποιοτικά, αλλά ούτε ουσιαστικά και στέρεα διδακτικά αποτελέσματα. Σε μια τέτοιου τύπου διδασκαλία η προσοχή και το ενδιαφέρον μας εξαντλείται στην μαθηματικώς αυστηρή παρουσίαση των αποδείξεων και, τις περισσότερες φορές, αδιαφορούμε παντελώς για τις διαδικασίες της *ανακάλυψης* –δηλαδή, τις διαδικασίες της σύλληψης ή της επινόησης των *κρίσιμων ιδεών*– που συνήθως μας οδηγούν με φυσιολογικό τρόπο στη σύνθεση κάποιας απόδειξης ή στη λύση κάποιου προβλήματος. Έχει ενδιαφέρον να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι η διαδικασία της μαθηματικής ανακάλυψης δεν ακολουθεί την παραγωγική συλλογιστική (:άποψη που υποστηρίχτηκε και από τους Polya, Popper και Lacatos). Και μάλιστα να επισημάνουμε ότι η παραγωγική συλλογιστική ενδείκνυται για την απόδειξη της αλήθειας μαθηματικών προτάσεων οι οποίες έχουν ήδη επινοηθεί διαμέσου, μάλλον, της μαθηματικής διαίσθησης και διαδικασιών *επαγωγικής συλλογιστικής*.

Αναντίρρητα, όλοι συμφωνούμε ότι κάθε διδασκαλία πρέπει να στοχεύει, πρωτίστως, στην ουσιαστική κατάκτηση των γνώσεων από τους μαθητές μας. Και μια πρώτη προϋπόθεση για την επίτευξη αυτού του στόχου είναι *η ενσυνείδητη και δημιουργική εμπλοκή του μαθητή στις διαδικασίες της μάθησης*: Είναι απαραίτητο, καταρχήν, να πεισθεί ο μαθητής ότι η εν λόγω γνώση τον ενδιαφέρει και ότι η προσωπική του συμμετοχή σ' αυτή τη διαδικασία μετράει και έχει νόημα. Ότι έτσι συμβάλλει κι αυτός στην "κατασκευή" και τη διαμόρφωση της νέας γνώσης και δεν είναι απλά ένας παθητικός δέκτης ενός συνόλου πληροφοριών. Στο πλαίσιο μιας τέτοιας διδασκαλίας, όπου οι μαθητές βρίσκονται στο επίκεντρο της μαθησιακής διαδικασίας, ο ρόλος του διδάσκοντα θα πρέπει να είναι, κυρίως, αυτός του καλού συντονιστή, που υποβάλλει στην κατάλληλη στιγμή εύστοχες ερωτήσεις οι οποίες προωθούν διαδικασίες έρευνας και γόνιμου προβληματισμού στη σχολική τάξη. Μια τέτοια τάξη στην οποία ο διδάσκων θέτει προβλήματα προς λύση και συγχρόνως λειτουργεί διευκολυντικά στην διαπραγμάτευσή τους, δημιουργεί μια *διερευνητική τάξη μαθηματικών* (όπως αυτή περιγράφεται από τους Cobb, Wood, Yackel και McNeal, 1992). Μέσα σε ένα τέτοιο διδακτικό περιβάλλον μπορεί να ενισχυθεί και να αναπτυχθεί η γόνιμη μαθηματική παρατηρητικότητα και η δημιουργική σκέψη των μαθητών μας: Δύο από τους πλέον βασικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης.

…