

**Πρόσθετο διδακτικό υλικό
στο πλαίσιο εισήγησης του Δ. Ντρίζου
στην Ημερίδα Μαθηματικών της 6ης Μαρτίου 2010 στα Τρίκαλα**

A. Δίνουμε εδώ για διδακτική αξιοποίηση και την τυπική απόδειξη ενός απλού θέματος, το οποίο ήταν το μαθηματικό υπόβαθρο κάποιου προβλήματος που αναλύθηκε στην εισήγηση.

Το θέμα:

Αν π_1 και π_2 είναι δύο θετικές συνεχείς συναρτήσεις με $\pi_1(x) > \pi_2(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} \pi_2(t) dt = \int_{\xi}^{\beta} \pi_1(t) dt$

Απόδειξη:

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\delta(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \pi_2(t) dt - \int_x^{\beta} \pi_1(t) dt, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

$$\text{Βρίσκουμε} \quad \delta(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} (\pi_2(t) - \pi_1(t)) dt < 0$$

$$\delta(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \pi_2(t) dt > 0$$

Επομένως $\delta(\alpha) \cdot \delta(\beta) < 0$ και επειδή η συνάρτηση δ είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $\delta(\xi) = 0$.

$$\delta(\xi) = 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \pi_2(t) dt = \int_{\xi}^{\beta} \pi_1(t) dt$$

Παρατηρήσεις:

1. Το παραπάνω θέμα μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

Αν π_1 και π_2 είναι δύο θετικές συνεχείς συναρτήσεις με $\pi_1(x) > \pi_2(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_{\alpha}^{\xi} \pi_2(t) dt = \int_{\xi}^{\beta} (\pi_1(t) - \pi_2(t)) dt$$

Σχόλιο:

Οι ισότητες $\int_{\alpha}^{\xi} \pi_2(t) dt = \int_{\xi}^{\beta} (\pi_1(t) - \pi_2(t)) dt$ και $\int_{\alpha}^{\beta} \pi_2(t) dt = \int_{\xi}^{\beta} \pi_1(t) dt$ είναι

προφανώς μαθηματικά ισοδύναμες.

(Η δεύτερη αυτή διατύπωση μάλλον περιγράφει πιο άμεσα τη γεωμετρική εποπτεία του φυσικού προβλήματος που προηγήθηκε του παραπάνω θέματος στη σχετική powerpoint παρουσίαση)

2. Περισσότερες πληροφορίες που σχετίζονται με τη γεωμετρική ερμηνεία του θέματος αυτού βρίσκονται στην ιστοσελίδα <http://dide.tri.sch.gr> στην αναρτημένη εργασία μου “Δοκίμια Διδακτικής με θέματα Ανάλυσης,, (σελ. 22, 23, 24 και 25).

B. Το υλικό που αναφέρονταν στις κυρτές συναρτήσεις διαμορφώθηκε με βάση επιλεγμένα τμήματα άρθρου του εισηγητή με τίτλο “Οι κυρτές συναρτήσεις – Μια πορεία μεταξύ γεωμετρικής και συναρτησιακής θεώρησης,, (περιοδικό Ευκλείδης Γ΄ της Ε.Μ.Ε., τεύχος 65, σελ. 79-97, Ιούλιος-Δεκέμβριος 2006).

Δημήτριος Ντρίζος, Σχολ. Σύμβ. Μαθηματικών