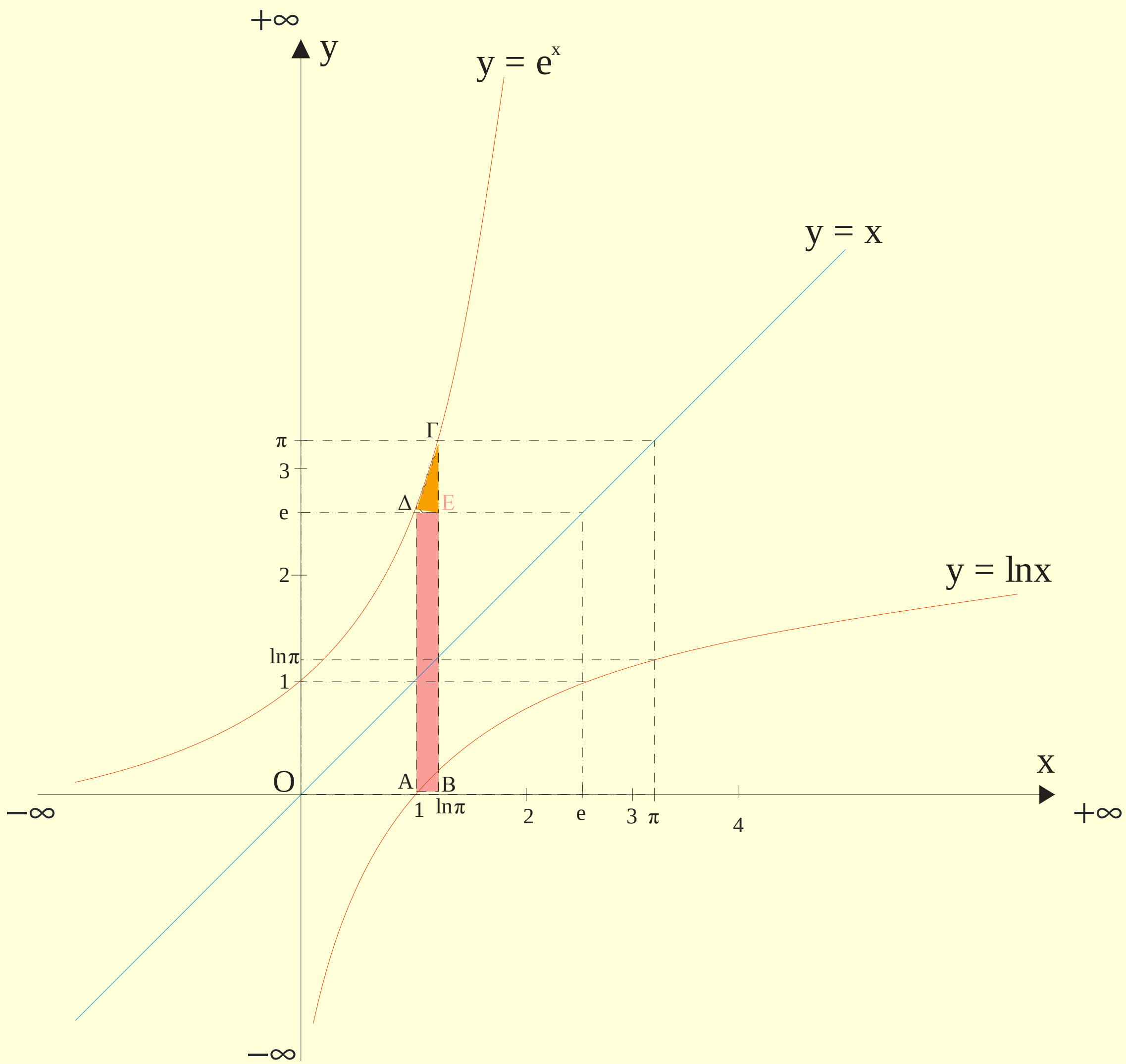
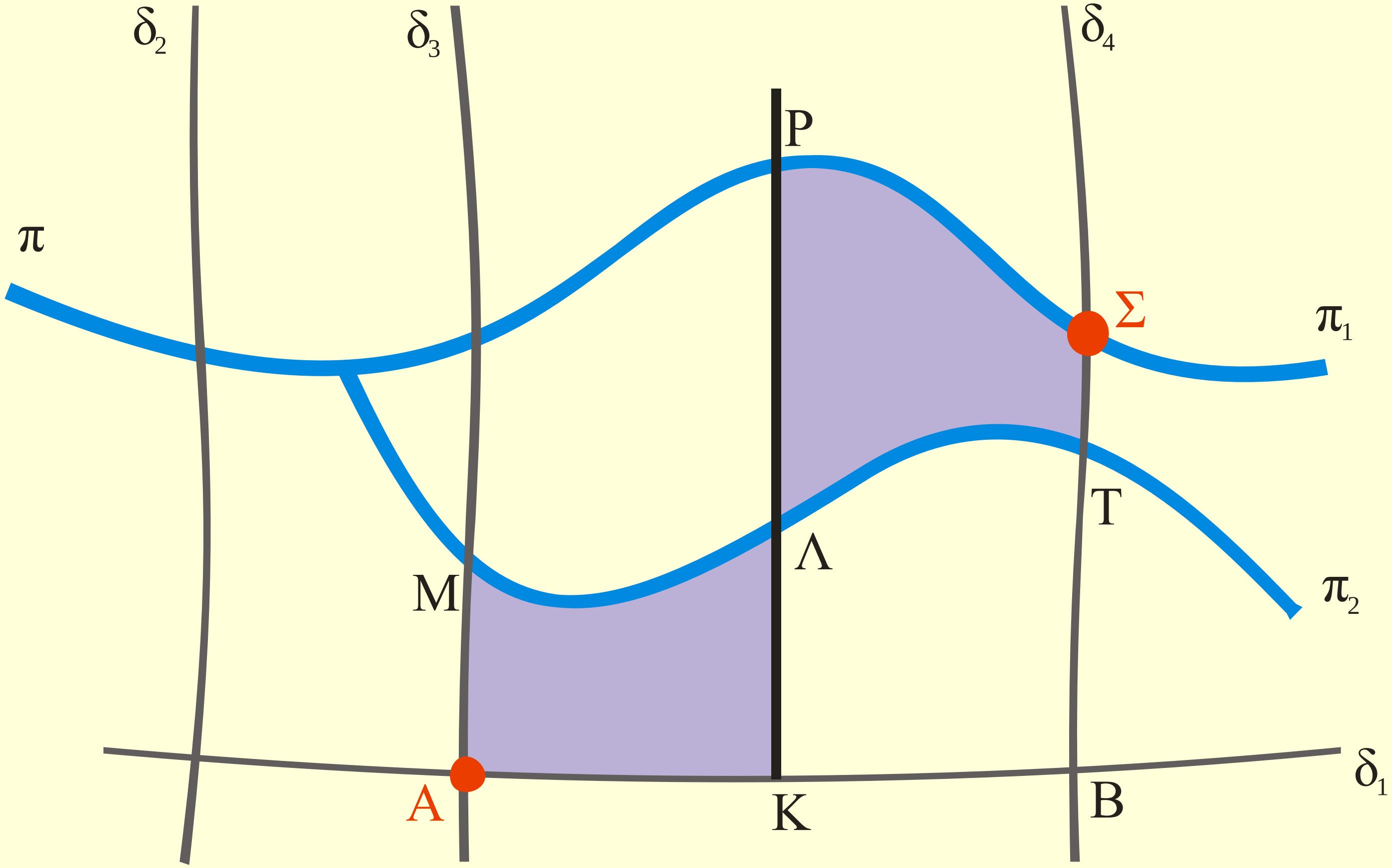
Ημερίδα Μαθηματικών
Τρίκαλα, 6 Μαρτίου 2010



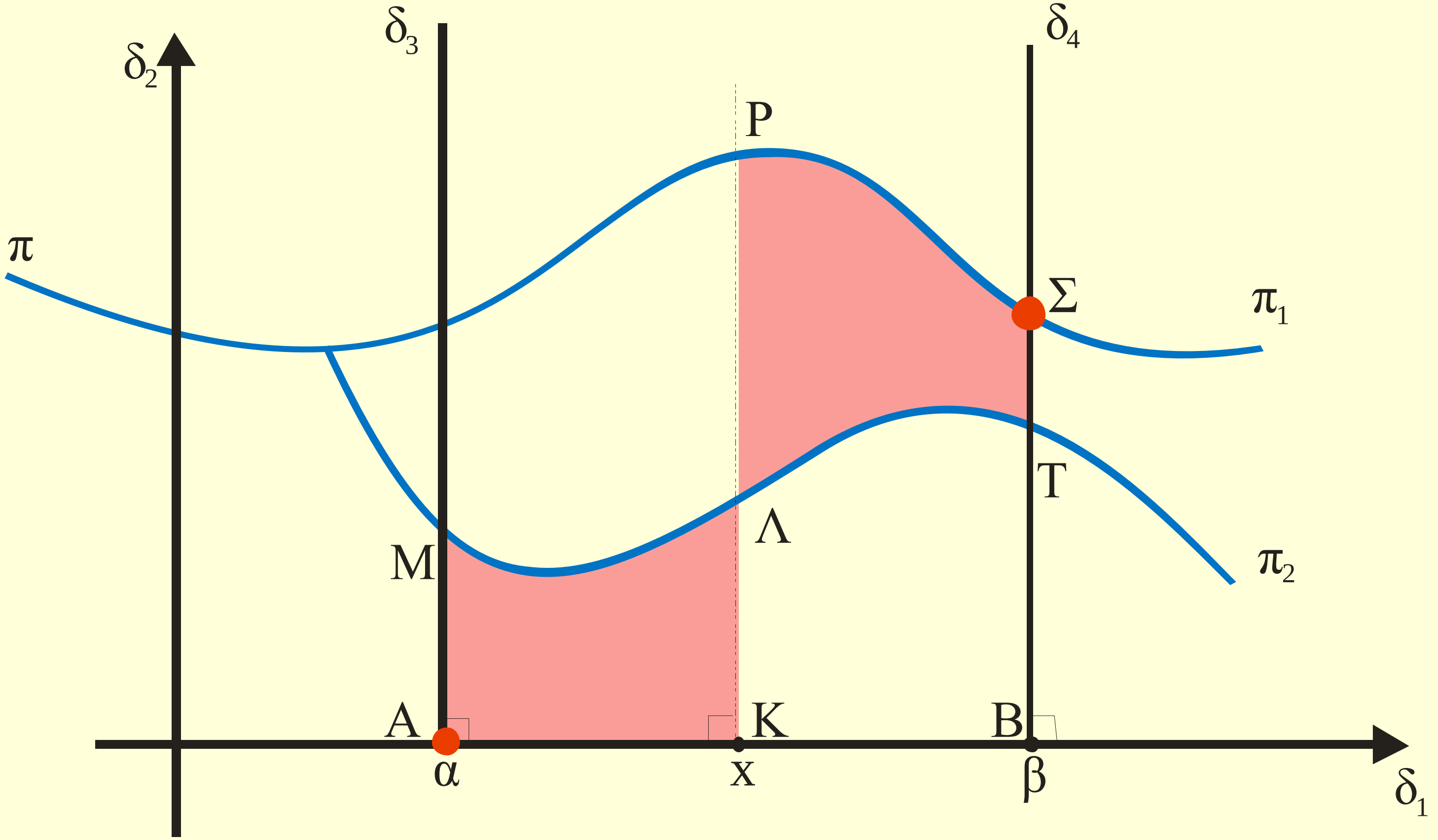
Δ. Ντρίζος
Σχολικός Σύμβουλος
Μαθηματικών

Η συμβολή των γεωμετρικών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία θεμάτων της Ανάλυσης

Στο σχήμα απεικονίζεται η κάτοψη μιας περιοχής, στην οποία φαίνονται δύο διακλαδώσεις π_1 και π_2 ενός ποταμού π, τέσσερις δρόμοι δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 και οι θέσεις δύο οικισμών Α και Σ.



Να διερευνήσετε τη δυνατότητα ύπαρξης μιας θέσης Κ πάνω στο δρόμο δ_1 και μεταξύ των Α και Β έτσι, ώστε η χάραξη ενός νέου δρόμου κάθετου προς τον δ_1 στο Κ, να έχει ως αποτέλεσμα οι περιοχές ΑΚΛΜ και ΛΤΣΡ να έχουν ίσα εμβαδά. Να υποστηρίξετε το αποτέλεσμα της διερεύνησης με μαθηματικά επιχειρήματα.

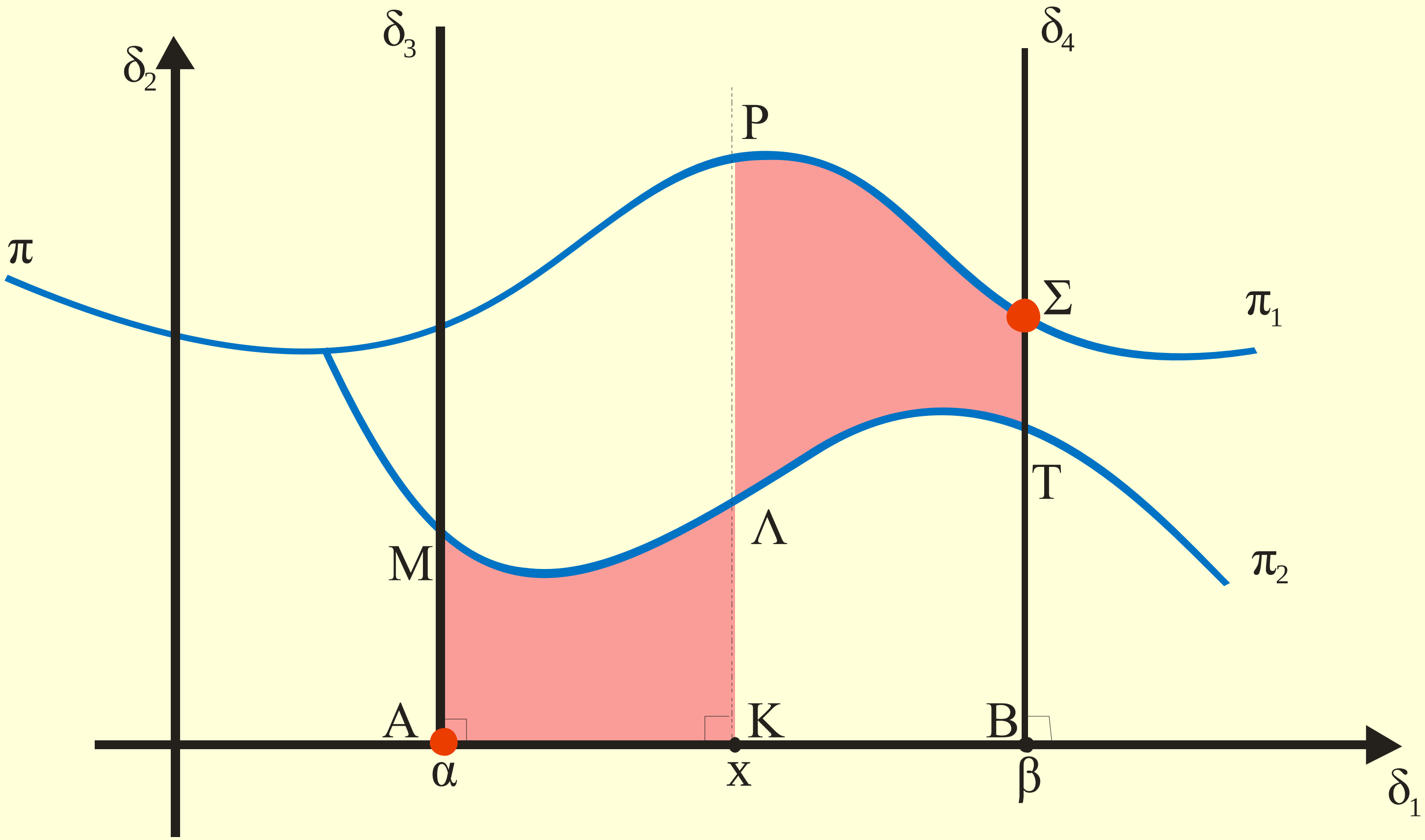


Εμβ.(ΑΚΛΜ) = $\int_\alpha^x \pi_2(t)dt$

Εμβ.(ΛΤΣΡ) = $\int_x^\beta [\pi_1(t) - \pi_2(t)]dt$

Εμβ. (ΑΚΛΜ): $0 \to \int_\alpha^\beta \pi_2(t)dt$

Εμβ.(ΛΤΣΡ): $\int_\alpha^\beta [\pi_1(t) - \pi_2(t)]dt \to 0$



$$\delta(x) = \text{Εμβ.}(\text{ΑΚΛΜ}) - \text{Εμβ.}(\text{ΛΤΣΡ}) =$$

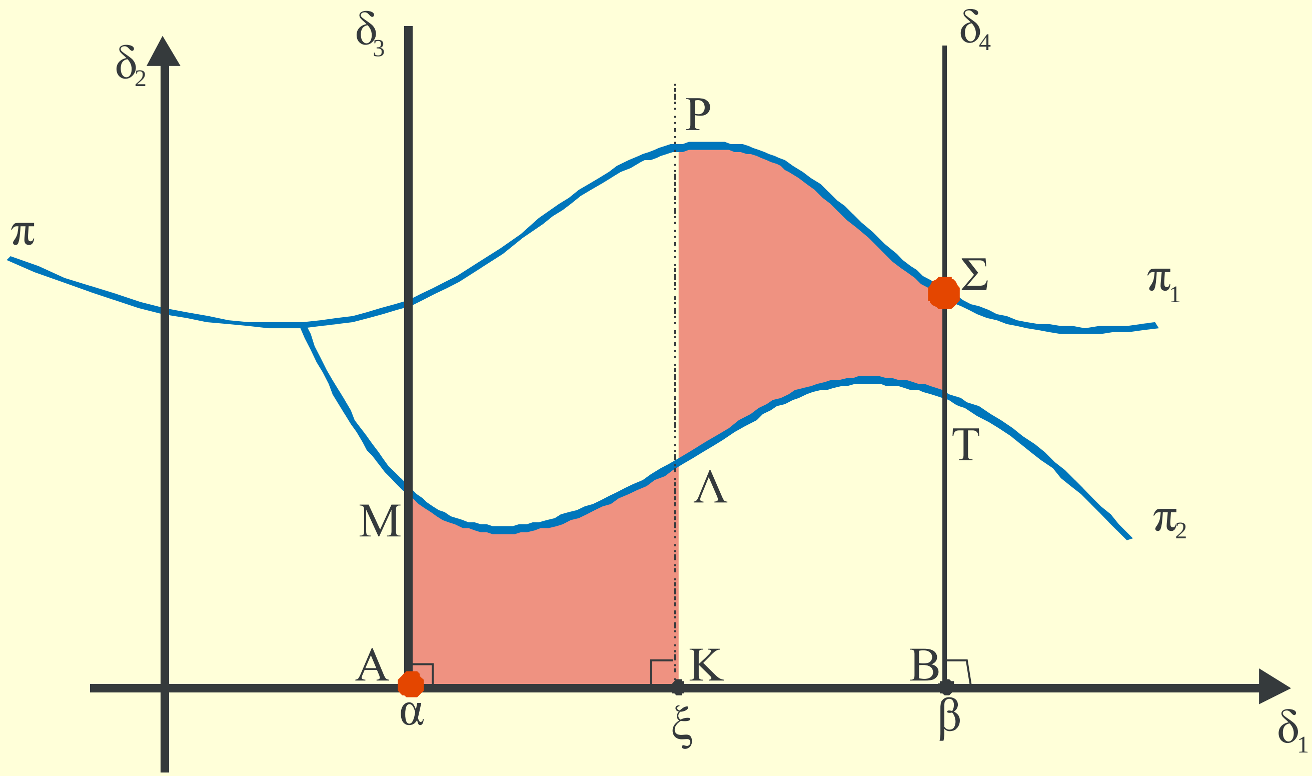
$$= \int_\alpha^x \pi_2(t)dt - \int_x^\beta \left[\pi_1(t) - \pi_2(t)\right]dt \quad \text{με } \; x \in [\alpha, \beta]$$

$$\delta(\alpha) = -\int_\alpha^\beta \left[\pi_1(t) - \pi_2(t)\right]dt < 0$$

$$\delta(\beta) = \int_\alpha^\beta \pi_2(t)dt > 0$$

Το πρόβλημα διατυπωμένο στην τυπική γλώσσα της Ανάλυσης:

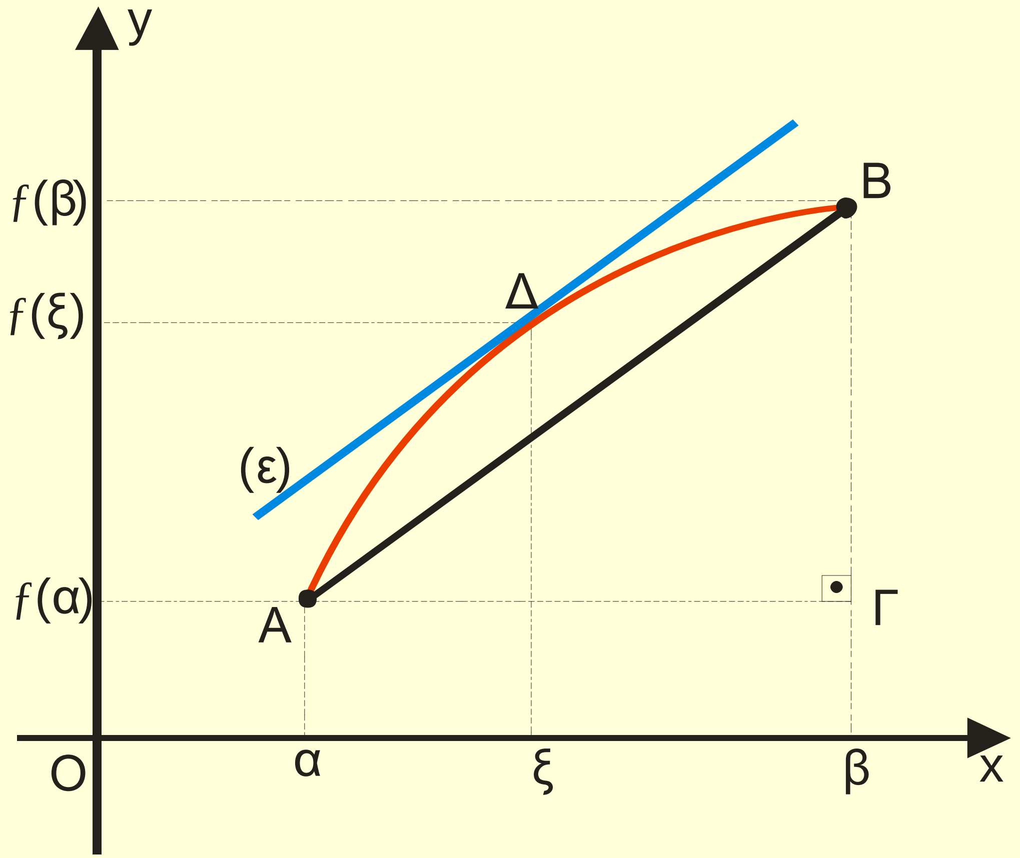
Αν π_1 και π_2 είναι δύο θετικές συνεχείς συναρτήσεις με $\pi_1(x) > \pi_2(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $\int_\alpha^\beta \pi_2(t)dt = \int_\xi^\beta \pi_1(t)dt$



Μήκος καμπύλης γραμμής και ορισμένο ολοκλήρωμα

Εισαγωγή:

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy του επιπέδου θεωρούμε μία ομαλή καμπύλη γραμμή ΑΒ με μήκος L_{AB} και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μήκος (ΑΒ).



Με Πυθ. Θεώρημα στο ΑΒΓ:

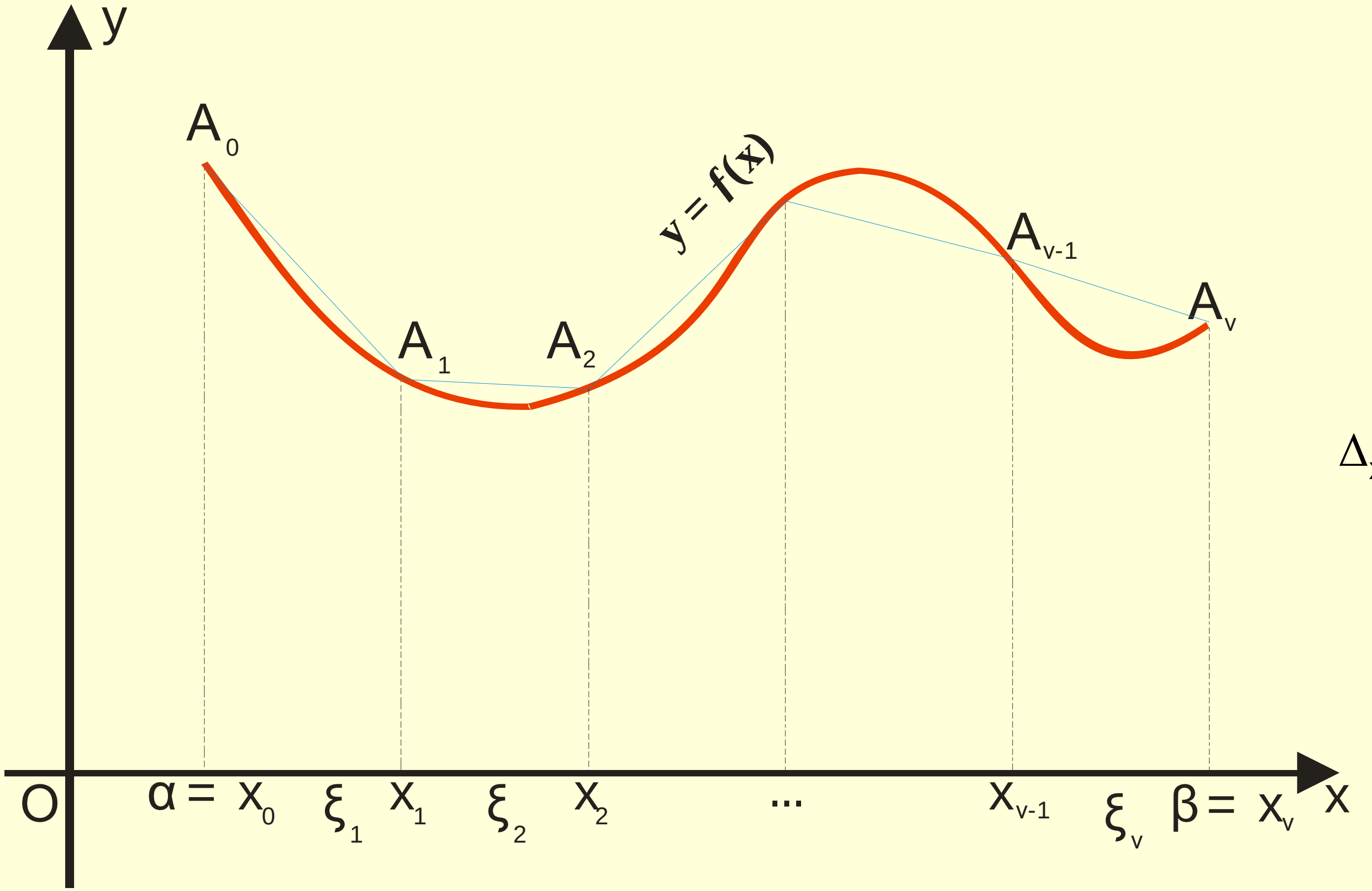
$$(AB) = \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + [f(\beta) - f(\alpha)]^2}$$

Θ.Μ.Τ. για την f στο [α, β]:

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)\cdot(\beta - \alpha)$$

$$(AB) = (\beta - \alpha)\cdot\sqrt{1 + [f'(\xi)]^2}$$

Αν $(\beta - \alpha) \to 0$ τότε $L_{AB} \cong (\beta - \alpha)\cdot\sqrt{1 + [f'(\xi)]^2}$



$$\Delta_x = x_\kappa - x_{\kappa-1} = \frac{\beta-\alpha}{\nu},$$

$$\kappa = 1, 2, \dots, \nu$$

$$L_{A_0A_\nu} = L_{A_0A_1} + L_{A_1A_2} + \dots + L_{A_{\nu-1}A_\nu}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left[f'(\xi_1)\right]^2}\,\Delta x + \lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left[f'(\xi_2)\right]^2}\,\Delta x + \dots + \lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left[f'(\xi_\nu)\right]^2}\,\Delta x$$

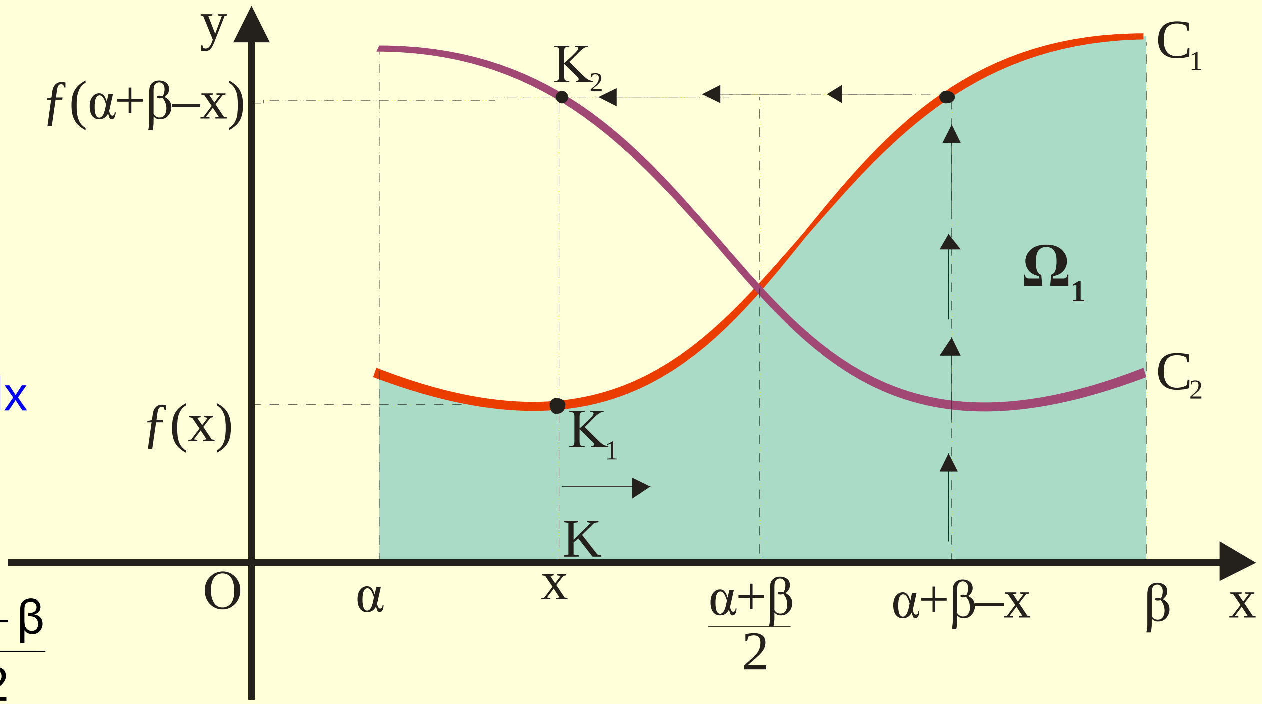
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\sqrt{1+\left[f'(\xi_\kappa)\right]^2}\,\Delta x = \lim_{\nu\to+\infty}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\sqrt{1+\left[f'(\xi_\kappa)\right]^2}\,\Delta x$$

Επομένως $L_{A_0A_\nu} = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$ ολοκλήρωμα Riemann της συνάρτησης $\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}$ στο [α, β].

Ολοκλήρωμα συνάρτησης με μια ειδική συμμετρία

Αν μια συνάρτηση
f: [α, β] $\to \mathbb{R}$
είναι συνεχής,
τότε ισχύει:

$\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$



$$\frac{\alpha+\beta}{2} - x = (\alpha+\beta-x) - \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Κατά την κίνηση της μεταβλητής x επί του άξονα των τετμημένων

από το x = α μέχρι το x = β, το σημείο K_1 διαγράφει τη γραμμή:

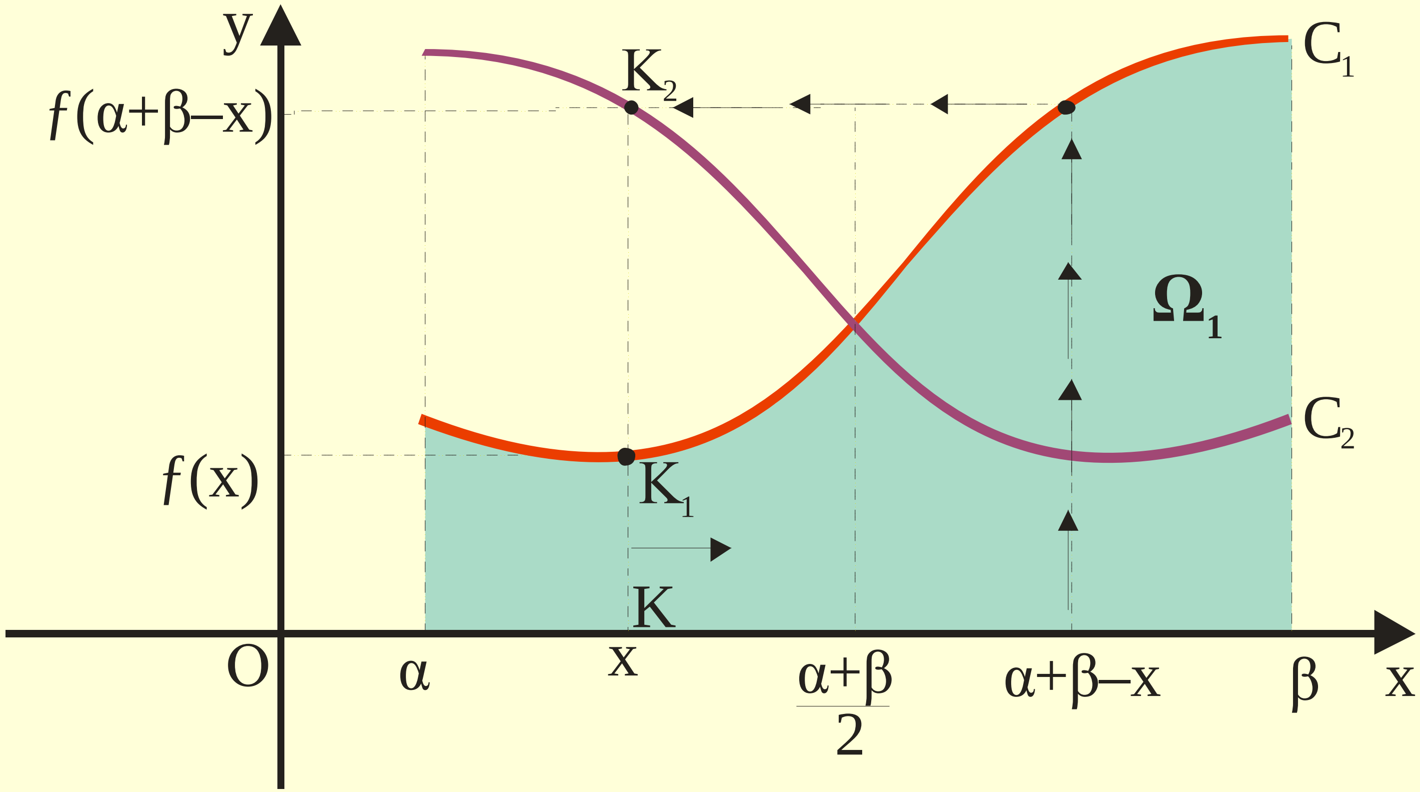
$$C_1 = \{(x,\ f(x)) \mid x \in [\alpha,\ \beta]\},$$

ενώ το K_2 διαγράφει τη γραμμή:

$$C_2 = \{(x,\ f(\alpha+\beta-x)) \mid x \in [\alpha,\ \beta]\}.$$

Η γνωστή τυπική απόδειξη της ισότητας $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx$
σαν αποτέλεσμα της γεωμετρικής εποπτείας

Για το ολοκλήρωμα θέτουμε:
$\alpha + \beta - x = u$
Ισοδύναμα:
$x = \alpha + \beta - u$
άρα $dx = -du$



Με $x = \alpha \rightarrow u = \beta$, ενώ με $x = \beta \rightarrow u = \alpha$, οπότε:

$$\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(u)\,du = \int_\alpha^\beta f(u)\,du = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

Παραδείγματα

1ο: Να αποδειχτεί ότι:

α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \frac{\pi}{4}$

β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^3 x}{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x} dx = \frac{\pi}{4}$

γ) $\int_0^{\pi} x \cdot f(\eta\mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta\mu x) dx$

δ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^2} dx = 0$

Παραδείγματα

2ο: Αν f συνάρτηση συνεχής στο [α, β], να αποδειχτεί ότι:

α) $\int_0^{\alpha} f(x)dx = \int_0^{\alpha} f(\alpha - x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\left[f(x) + f(\alpha - x)\right]dx$

β) $\int_{\alpha}^{\beta} x \cdot f(x)dx = \frac{\alpha+\beta}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx,$

εφόσον $f(x) = f(\alpha + \beta - x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

γ) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x-\alpha)}{f(x-\alpha)+f(\beta-x)}dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\beta-x)}{f(x-\alpha)+f(\beta-x)}dx = \frac{\beta-\alpha}{2},$

εφόσον $f(x - \alpha) + f(\beta - x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Ένα βασικό θέμα στις κυρτές συναρτήσεις

Με υπόθεση ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή στο κλειστό διάστημα [α, β] και συνεχής στα σημεία α και β, να αποδείξετε τους ισχυρισμούς:

(α) $$f(x) + f(\alpha + \beta - x) \geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right), \ x\in[\alpha, \beta]$$

(β) $$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \leq \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \leq \frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}, \ x\in(\alpha, \beta)$$

(Θεώρημα των τριών χορδών)

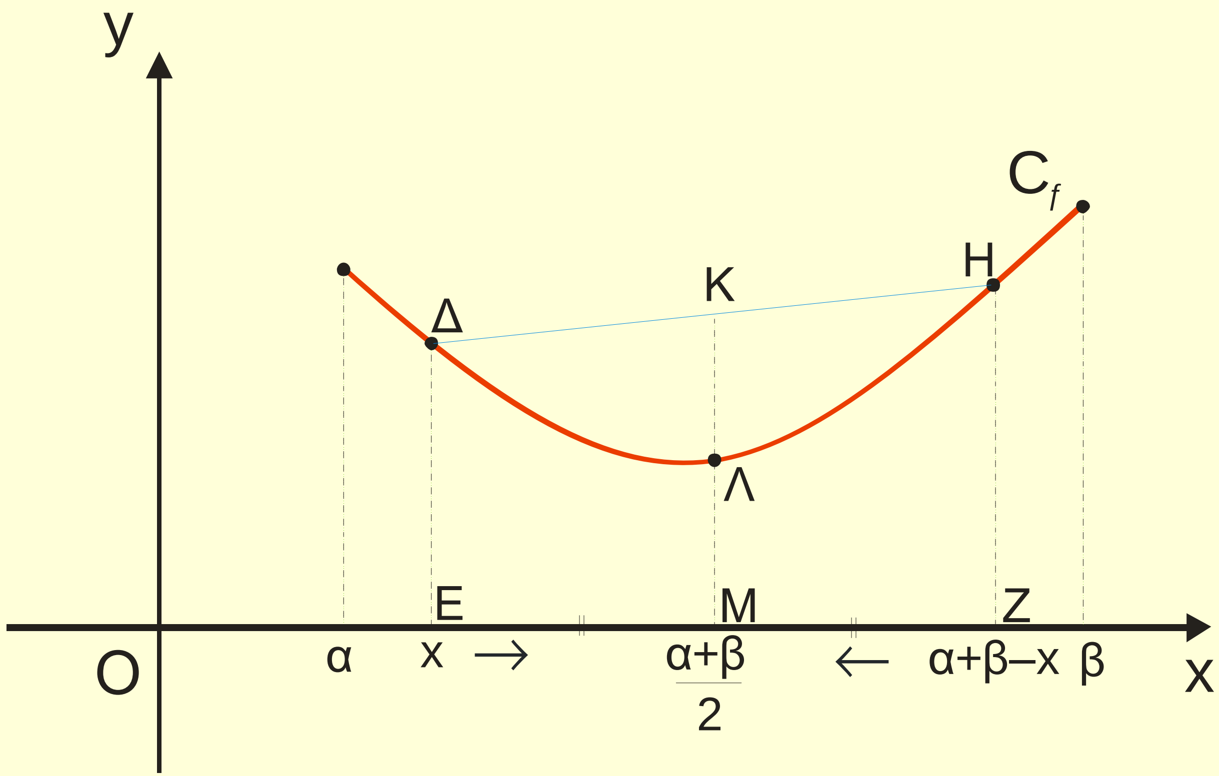
(γ) $$f(x) \leq \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot f(\beta) + \frac{\beta-x}{\beta-\alpha}\cdot f(\alpha), \quad x\in[\alpha, \beta]$$

(δ) $$2(\beta-\alpha)\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq 2\cdot\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leq (\beta-\alpha)\cdot\left[f(\alpha)+f(\beta)\right], \quad x\in[\alpha, \beta]$$

Για το ερώτημα (α):

$$f(x) + f(\alpha + \beta - x) \geq 2\cdot\ f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\ ,\ x\in[\alpha,\ \beta]$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} - x = \alpha+\beta-x-\frac{\alpha+\beta}{2}$$



Το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι, γενικά, τραπέζιο με βάσεις:

ΔΕ = $f(x)$, ΗΖ = $f(\alpha + \beta - x)$ και διάμεσο την ΚΜ = $\frac{1}{2}\cdot\left[f(x)+f(\alpha+\beta-x)\right]$

η f είναι κυρτή συνάρτηση, άρα ΛΜ $\leq$ ΚΜ.

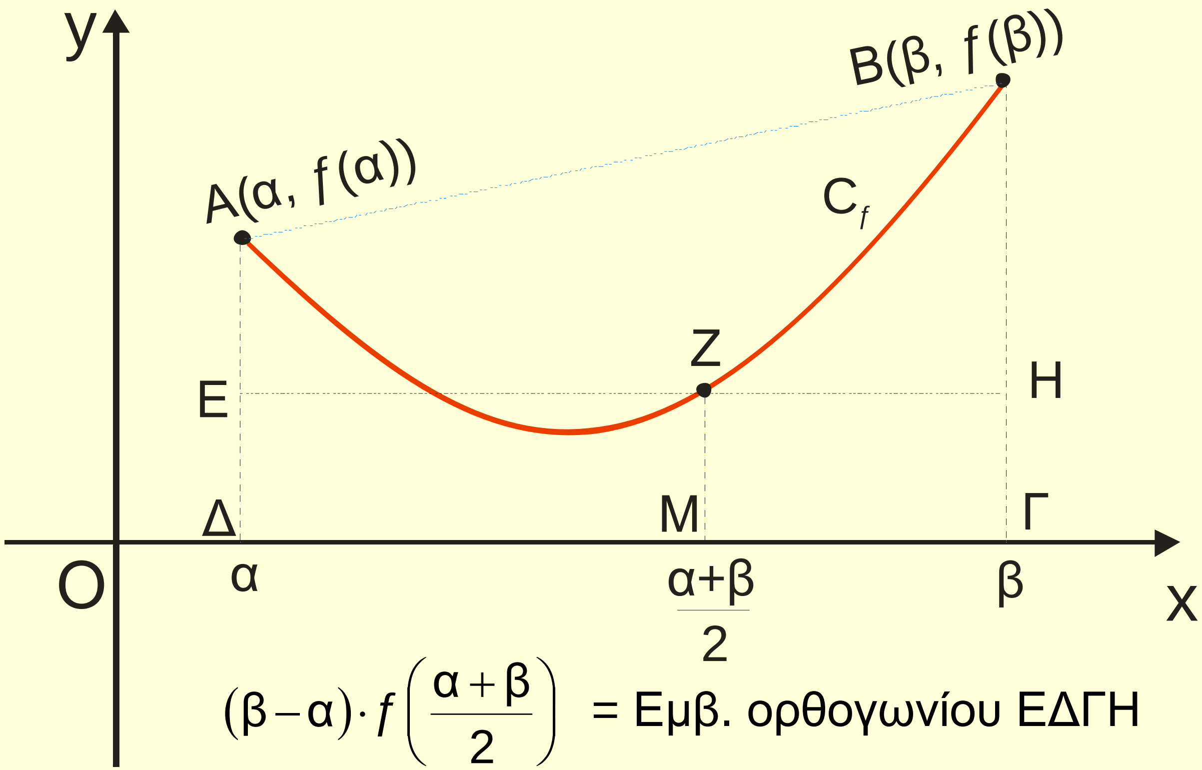
Για το ερώτημα (δ):

$$(\beta-\alpha)\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\leq\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\leq\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cdot[f(\alpha)+f(\beta)]$$

$A\Delta = f(\alpha)$

$B\Gamma = f(\beta)$

$ZM = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$



$(\beta-\alpha)\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ = Εμβ. ορθογωνίου ΕΔΓΗ

$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$ = Εμβ. χωρίου ΑΖΒΓΔ

$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cdot[f(\alpha)+f(\beta)]$ = Εμβ. τραπεζίου ΑΒΓΔ

Διδακτικές προσεγγίσεις του προβλήματος της σύγκρισης των αριθμών e^{π} και π^{e}

Πρώτη διδακτική προσέγγιση

$$e^{\pi}-\pi^{e}=e^{\pi}\left(1-\frac{\pi^{e}}{e^{\pi}}\right),\quad e^{\pi}>0$$

$$h(x)=\frac{x^{e}}{e^{x}},\quad x\in[e,\pi]$$

$$h'(x)=\left(\frac{x^{e}}{e^{x}}\right)'=\ldots=\frac{x^{e}\cdot e^{x}(e-x)}{x\cdot e^{2x}}<0\text{ , για κάθε } x\in(e,\pi).$$

$$h(e)>h(\pi)$$

$$1>\frac{\pi^{e}}{e^{\pi}}$$

$$e^{\pi}>\pi^{e}$$

Παρατήρηση:

Η λύση του προβλήματος επιτυγχάνεται και διαμέσου της συνάρτησης $\dfrac{e^{x}}{x^{e}}$ με $x\in[e,\pi]$.

Δεύτερη διδακτική προσέγγιση

Να τοποθετήσετε το κατάλληλο σύμβολο (=, < , >) μεταξύ των αριθμών e^{π} και π^{e}, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

Σκέψεις : $e^{\pi} \boxed{;} \pi^{e}$

$$\ln e^{\pi} \boxed{;} \ln \pi^{e}, \quad \ln x \uparrow \ (e > 1)$$

$$\pi \cdot \ln e \boxed{;} e \cdot \ln \pi$$

$$\frac{\ln e}{e} \boxed{;} \frac{\ln \pi}{\pi}$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x \in [e, \pi]$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$$

$$e < \pi$$

$$f(e) > f(\pi)$$

$$\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi}$$

$$\pi \cdot \ln e > e \cdot \ln \pi$$

$$e^{\pi} > \pi^{e}$$

Παρατήρηση:

Η λύση του προβλήματος επιτυγχάνεται και διαμέσου της συνάρτησης $\frac{x}{\ln x}$ με $x \in [e, \pi]$.

Τρίτη διδακτική προσέγγιση

Να αποδειχτεί ότι $e^{\pi} > \pi^{e}$

Ανάλυση της σχέσης που θέλουμε να αποδείξουμε:

$$e^{\pi} > \pi^{e} \Leftrightarrow \ln e^{\pi} > \ln \pi^{e} \Leftrightarrow \pi > e \cdot \ln \pi \Leftrightarrow \boxed{\pi - e \cdot \ln \pi > 0}$$

$f(x) = x - e \cdot \ln x,\ x \in [e, \pi]$

$f'(x) = 1 - \frac{e}{x} = \frac{x-e}{x} > 0,\ \ x \in (e, \pi).$

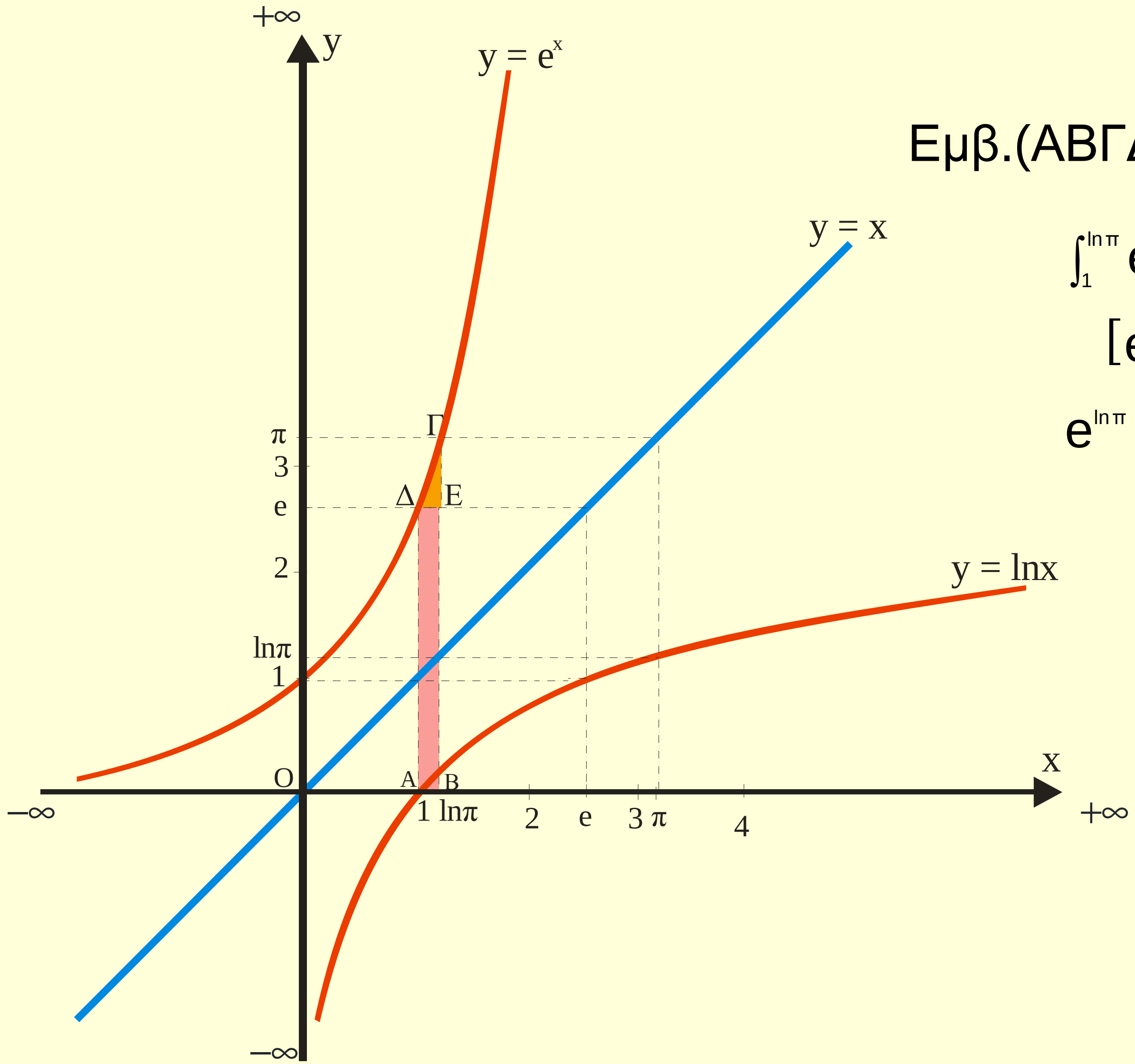
$e < \pi \rightarrow f(e) < f(\pi) \rightarrow \ldots e^{\pi} > \pi^{e}.$

Παρατήρηση:

Η λύση του προβλήματος επιτυγχάνεται και διαμέσου της

συνάρτησης $e \cdot \ln x - x$, με $x \in [e, \pi]$.

Πρώτη γεωμετρική προσέγγιση



Εμβ.(ΑΒΓΔ) > Εμβ.(ΑΒΕΔ)

$$\int_1^{\ln\pi} e^x dx > e\cdot(\ln\pi - 1)$$

$$[e^x]_1^{\ln\pi} > e\cdot\ln\pi - e$$

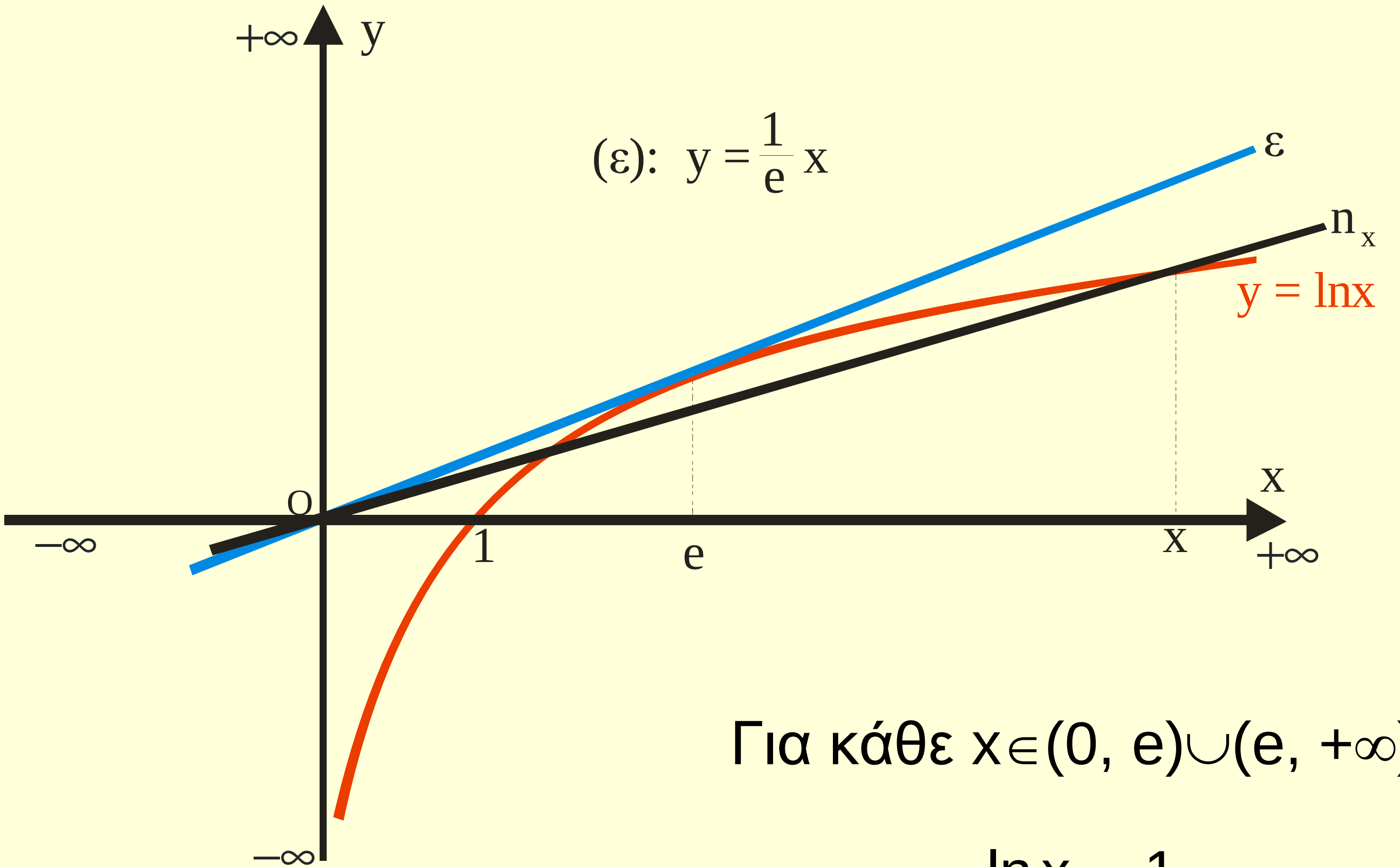
$$e^{\ln\pi} - \cancel{e} > \ln\pi^e - \cancel{e}$$

$$\pi > \ln\pi^e$$

$$e^\pi > e^{\ln\pi^e} \quad \text{γιατί} \quad e^x \uparrow (e > 1)$$

$$e^\pi > \pi^e$$

Δεύτερη γεωμετρική προσέγγιση



Για κάθε $x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$

$$\lambda_{n_x} < \lambda_{\varepsilon} \rightarrow \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{e} \rightarrow e \cdot \ln x < x$$

$$\rightarrow \ln x^e < \ln e^x \rightarrow x^e < e^x$$

Τρίτη γεωμετρική προσέγγιση

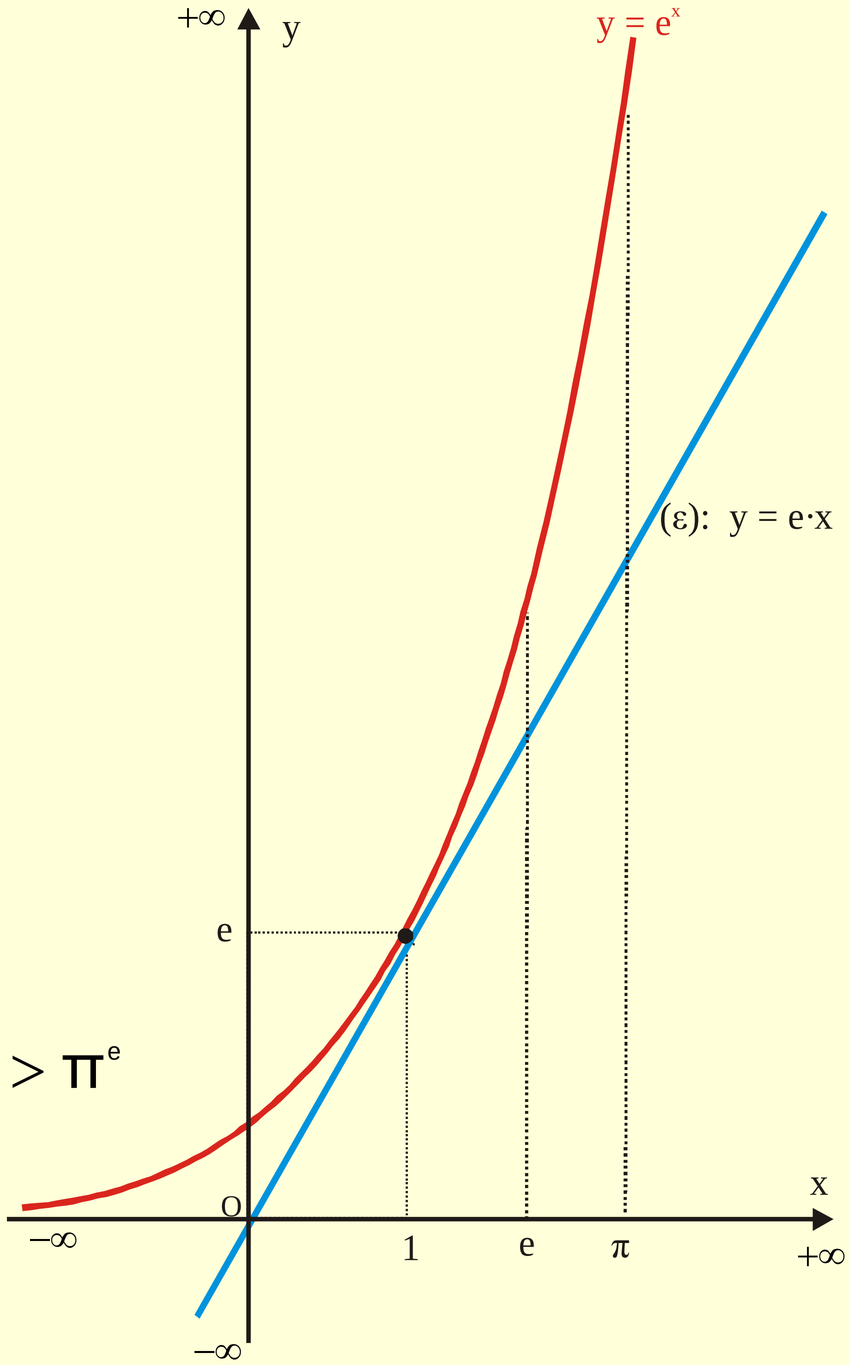
Για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$$\text{ισχύει}: e^x > e \cdot x \qquad (1)$$

$$\text{Είναι}: \ \pi > e \ \rightarrow \frac{\pi}{e} > 1$$

$$\text{Για } x = \frac{\pi}{e} \ \text{η} \ \ (1) \ \ \text{γίνεται}:$$

$$e^{\frac{\pi}{e}} > \cancel{e} \cdot \frac{\pi}{\cancel{e}} \ \rightarrow \ e^{\left(\frac{\pi}{\cancel{e}}\right)\cdot \cancel{e}} > \pi^e \ \rightarrow e^{\pi} > \pi^e$$



Τέταρτη γεωμετρική προσέγγιση

Για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\text{ισχύει}: e^x > x + 1 \qquad (1)$$

$$\text{Είναι}: \ \pi > e \ \rightarrow \frac{\pi}{e} - 1 > 0$$

$$\text{Για } x = \frac{\pi}{e} - 1 \ \text{ από την } (1)$$

$$\text{τελικά παίρνουμε}: e^{\pi} > \pi^{e}$$