

Ενδεικτική πρόταση θεμάτων
με στόχο την επανάληψη της ενότητας
Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων
Απλοποίηση κλασμάτων – Επίλυση εξισώσεων
(Άλγεβρα Α')

1. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

(i) $x^3 + x^2 - 4x - 4$

(ii) $9x^2 - 25y^2 - 5y - 3x$

(iii) $x^2 + 6x - y^2 + 2y + 8$

(iv) $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

(v) $(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2$

(vi) $x^2 + 8x - y^2 + 2y + 15$

(vii) $x^4 + 4x^2 + 16$

(viii) $1 - x^2 - y^2 + 2xy$

(ix) $\alpha(\alpha - 3y) + \beta(x - \alpha) - x(\alpha - 3y)$

(x) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

2. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

(i) $\frac{3x^2 - 6x}{2x^2 - 8x}$

(ii) $\frac{9(2x + 1)^2 - (4x - 1)^2}{4(x^2 + 4x + 4)}$

(iii) $\frac{x^3 + 64}{x^3 + 8x^2 + 16x}$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

(i) $x^3 + x^2 + 2x + 2 = 0$

(ii) $3x^3 + 2x^2 + 6x + 4 = 0$

(iii) $(3x + 5)^2 + 6x + 10 = 25 - 9x^2$

(iv) $x^3 + 25x = 10x^2$

- (v) $9x^2 + 16 = 24x$
- (vi) $(8x - 2)(3x - 1) = 0$
- (vii) $(8x - 2)(3x - 1) = 1$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

- (i) $\frac{2x - 1}{3} - \frac{x + 1}{4} - \frac{2x + 2}{3} = 1$
- (ii) $\frac{1}{x + 3} + \frac{1}{x - 3} = \frac{6}{9 - x^2}$
- (iii) $\frac{2x - 3}{2x - 4} - 6 = \frac{x - 5}{6 - 3x} - \frac{11}{2}$
- (iv) $\frac{x - 54}{x - 54} = 0$
- (v) $\frac{x - 54}{x - 54} = 1$
- (vi) $\frac{(x^2 - 64)^2}{x + 8} = 0$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

- (i) $(2\lambda^2 - 50)x = 5 - \lambda$
- (ii) $\lambda^2x + 3 = x + \lambda$
- (iii) $\frac{\lambda - 1}{\lambda}x + 3 = 2x - \lambda - 1$

6. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η εξίσωση:

$$\lambda^2x = \lambda(\lambda + 3) + 9x$$

- (i) έχει μοναδική λύση.
- (ii) γίνεται ταυτότητα.

7. Σε κυβική δεξαμενή ακμής $1m$, εισρέει νερό με σωλήνα παροχής

$\Pi_1 = 20 \frac{lt}{sec}$ και ταυτόχρονα εκρέει νερό από τον πυθμένα της δεξαμενής με

σωλήνα ελεγχόμενης εκροής $\Pi_2 = \lambda \frac{lt}{sec}$, όπου $\lambda \leq 20$.

Μετά χρόνο t από την έναρξη του εν λόγω πειράματος, ονομάζουμε V_1 τον όγκο του νερού που έχει εισρεύσει στην δεξαμενή και V_2 τον όγκο του νερού που έχει εκρεύσει από αυτήν.

Να γράψετε:

α. Τα V_1 και V_2 ως συνάρτηση του t .

β. Την εξίσωση που συνδέει τα V_1 , V_2 και περιγράφει εκείνη ακριβώς την χρονική στιγμή κατά την οποία η δεξαμενή γεμίζει με νερό.

γ. Να διερευνήσετε την εξίσωση του ερωτήματος β. για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ και έπειτα να ερμηνεύσετε με φυσικό τρόπο (διαισθητικά) τα αποτελέσματα της διερεύνησής σας.

δ. Σε πόσο ακριβώς χρόνο γεμίζει η δεξαμενή, όταν

i. $\lambda = 0$, ii. $\lambda = 10$.

Λύση

α. $V_1 = 20t$ και $V_2 = \lambda t$

β. Η εξίσωση που συνδέει τα V_1 , V_2 και περιγράφει εκείνη ακριβώς την χρονική στιγμή κατά την οποία η δεξαμενή γεμίζει με νερό, είναι η: $V_1 - V_2 = 1000/t$, που ισοδύναμα γράφεται: $(20 - \lambda)t = 1000$. Η τελευταία αυτή εξίσωση είναι παραμετρική με άγνωστο το t και παράμετρο το λ , όπου το λ μεταβάλλεται στο διάστημα $[0, 20]$.

κ.τ.λ.

Δημήτριος Α. Ντρίζος
Σχολ. Σύμβ. Μαθηματικών