Λίγα λόγια για τις συναρτήσεις του Möbius (Moebius) με αφορμή μία άσκηση της "Γεωμετρίας των Μιγαδικών Αριθμών"

Του **Δημητρίου Α. Ντρίζου**
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών

…

Άσκηση (Ι)

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z που οι εικόνες τους ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

Α) Να αποδείξετε ότι:

α) Και οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $w=\dfrac{az-i}{iz+a}$, όπου $a\in R-\{-1,1\}$, ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

β) $|w-z|\le 2$

Β) Έστω $a=0$.

Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ζεύγη (z,w) για καθένα από τα οποία ισχύει: $|z-w|=2$.

Απάντηση…

α) Υπόθεση: $|z|=1$

$$|w|^2=\frac{|az-i|^2}{|iz+a|^2}=\frac{(az-i)(a\overline{z}+i)}{(iz+a)(-i\overline{z}+a)}=\frac{a^2|z|^2+a(z-\overline{z})i+1}{|z|^2+a(z-\overline{z})i+a^2}=1.$$ Άρα $|w|=1$ κ.τ.λ.

Σκέψεις στο πλαίσιο ελέγχου των υποθέσεων

Θα μπορούσε ο z να πάρει την απαγορευτική, λόγω του παρονομαστή, τιμή ai;

Ισχυρισμός: $z=ai\Rightarrow|z|=|ai|\Rightarrow1=|a|\cdot|i|\Rightarrow|a|=1\Rightarrow a=1$ ή $a=-1$, άτοπο.

…

Το θέμα που ακολουθεί έχει μόνον ενημερωτικό χαρακτήρα, καθώς δεν συμπεριλαμβάνεται στην σχολική ύλη.

Ανάλυση της Άσκησης (Ι) στο πλαίσιο της θεωρίας περί των συναρτήσεων του Möbius (Moebius)

Στην παραπάνω άσκηση (Ι), ο w είναι μία μιγαδική συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής, της z, η οποία διατρέχει το σύνολο $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$. Η συνάρτηση αυτή, $f(z)=w=\dfrac{az-i}{iz+a}$, ανήκει σε μία ειδική κατηγορία μιγαδικών συναρτήσεων που στην βιβλιογραφία αναφέρονται ως συναρτήσεις (ή μετασχηματισμοί) του Möbius.

Ορισμός: Οι συναρτήσεις $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ με τύπο μορφής $f(z)=w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, όπου οι $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ είναι γενικά δεδομένοι μιγαδικοί αριθμοί, καλούνται συναρτήσεις (ή μετασχηματισμοί) του Möbius.

Παρατηρήσεις:

Θα αναζητήσουμε μια συνθήκη μεταξύ των $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ η οποία θα καθιστά, πρώτον, πιο ενδιαφέρουσες γεωμετρικά τις εν λόγω συναρτήσεις (οι εικόνες της f να μην είναι μονοσύνολα) και δεύτερον, να προκύπτει ότι τα διατεταγμένα ζεύγη $(\gamma,\delta),(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)$ και (β,δ) έχουν τιμή διαφορετική της $(0,0)$.

Από τον τύπο $f(z)=w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, βλέπουμε πως, αν $\gamma=0$, τότε πρέπει υποχρεωτικά $\delta\neq 0$. Ενώ, αν $\gamma\neq 0$, ο τύπος της f μπορεί να πάρει την επόμενη **κομβική μορφή:**

$$f(z)=w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma}\cdot\frac{1}{\gamma z+\delta} \quad \textbf{:(1)}$$

Από την τελευταία αυτή μορφή του $f(z)$ βλέπουμε πως, αν $\alpha\delta-\beta\gamma=0$, τότε προκύπτει $f(z)=w=\dfrac{\alpha}{\gamma}$. Στην περίπτωση αυτή, οι εικόνες των z αντιστοιχίζονται, μέσω της f, στο μοναδικό σημείο (εικόνα) $\dfrac{\alpha}{\gamma}$ του μιγαδικού επιπέδου. Κάτι τέτοιο όμως αποτελεί μία τετριμμένη περίπτωση και προφανώς δεν παρουσιάζει, τουλάχιστον γεωμετρικά, κάποιο ενδιαφέρον. Γι' αυτό και οι συναρτήσεις του Möbius[1] θεωρούνται με την υπόθεση $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$. Στο σημείο αυτό παρατηρείστε πως, δεδομένης της υπόθεσης $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$, εξασφαλίζεται ότι τα διατεταγμένα ζεύγη $(\gamma,\delta),(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)$ και (β,δ) έχουν τιμή διαφορετική της $(0,0)$. Και πως με $\gamma\neq 0$ ισχύει η παραπάνω κομβική μορφή (1).

Ας έλθουμε τώρα πάλι στο α) ερώτημα της άσκησης (Ι) για να εξετάσουμε τι συμβαίνει όταν το a γίνει 1 ή -1, στο πλαίσιο της παραπάνω κομβικής μορφής (1):

Με $a=1$προκύπτει $w=\dfrac{z-i}{iz+1}$ (με $z\neq i$: απαίτηση λόγω του παρονομαστή) και επειδή τότε μηδενίζεται η παράσταση $\alpha\delta-\beta\gamma$, εφαρμόζοντας την κομβική μορφή (1) βρίσκουμε ότι όλοι οι αριθμοί $z\neq i$, με την ιδιότητα $|z|=1$, αντιστοιχίζονται μέσω της f στον $w=-i$ για τον οποίο ισχύει: $|w|=1$. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει πως, όταν $a=1$, ο μοναδιαίος κύκλος των εικόνων των z (με εξαίρεση την εικόνα του $z=i$) απεικονίζεται στην εικόνα του $w=-i$ που ανήκει στον ίδιο κύκλο.

[1] Στη σχετική βιβλιογραφία οι συναρτήσεις του Möbius με την υπόθεση $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ αναφέρονται και ως ομογραφικές συναρτήσεις.

Με $a=-1$προκύπτει $w=\dfrac{-z-i}{iz-1}$ (με $z\neq -i$: απαίτηση λόγω του παρονομαστή) και επειδή τότε μηδενίζεται η παράσταση $\alpha\delta-\beta\gamma$, εφαρμόζοντας την κομβική μορφή (1) βρίσκουμε ότι όλοι οι αριθμοί $z\neq -i$, με την ιδιότητα $|z|=1$, αντιστοιχίζονται μέσω της f στον $w=i$ για τον οποίο ισχύει: $|w|=1$. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει πως, όταν $a=-1$, ο μοναδιαίος κύκλος των εικόνων των z (με εξαίρεση την εικόνα του $z=-i$) απεικονίζεται στην εικόνα του $w=i$ που ανήκει στον ίδιο κύκλο.

Τέλος, έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι, η συνάρτηση Möbius της άσκησης (Ι) γεωμετρικά μετασχημάτισε κύκλο (:εικόνες των z) σε κύκλο (:εικόνες των w) του μιγαδικού επιπέδου (Γενικά οι συναρτήσεις του Möbius απεικονίζουν κύκλους ή ευθείες σε κύκλους ή ευθείες).

Βιβλιογραφικές πηγές:

[1] Hans Schwerdtfeger. (1979). "*Geometry of Complex Numders*", New York: Dover Publications, Inc.

[2] Περιοδικό Ευκλείδης Β΄ της Ε.Μ.Ε.

[3] Προς δημοσίευση άρθρο του Δ. Ντρίζου: "*Μιγαδικοί αριθμοί – Η Γεωμετρία των Μιγαδικών Αριθμών*".