# ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ (2), 2008

"Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ"

Του **Δημητρίου Α. Ντρίζου**

*Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών*

Τα παρακάτω θέματα εντάσσονται στο ίδιο ακριβώς πλαίσιο διδακτικών στόχων με άλλα προηγούμενα[1] υπό τον τίτλο: ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ (1), 2007. Γι' αυτό διατηρήθηκε και η ενιαία αρίθμηση των θεμάτων των δύο εν λόγω κειμένων.
Τα κριτήρια για την επιλογή των θεμάτων –και αυτής της νέας παρουσίασης: ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ (2), 2008– σχετίζονται με το βαθμό της διδακτικής τους συμβολής στην επισήμανση και στον έλεγχο, *σ' ένα πρώτο στάδιο*, της εμπέδωσης των ιδιοτήτων του μέτρου, των συζυγών μιγαδικών αριθμών και της "γεωμετρίας των μιγαδικών αριθμών[2]".

## ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

### ΘΕΜΑ $14^0$

Έστω $\alpha, \beta$ πραγματικοί αριθμοί και ο μιγαδικός αριθμός $w = \gamma + \delta i$.

Αν οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + yi$ ικανοποιούν την εξίσωση $\alpha z\bar{z} + wz + \overline{wz} + \beta = 0$, να αποδείξετε ότι στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες των $z$ ανήκουν:

**α)** Στην ευθεία με εξίσωση $\gamma x - \delta y + \dfrac{\beta}{2} = 0$, αν $\alpha = 0$ και $w\bar{w} > 0$.

**β)** Στον κύκλο με εξίσωση $\left(x + \dfrac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + \left(y - \dfrac{\delta}{\alpha}\right)^2 = \dfrac{\gamma^2 + \delta^2 - \alpha\beta}{\alpha^2}$, αν $\alpha \neq 0$ και $w\bar{w} > \alpha\beta$ .

### ΘΕΜΑ $15^0$

Έστω $\mathrm{A}$ και $\mathrm{B}$ τα σύνολα των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z$ και $w$ αντιστοίχως, για τους οποίους ισχύουν:

$|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\big((1-3i)z\big) + 6 = 0$ και $|w+4-i| = |w+4-5i|$ .

**α)** Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τα $\mathrm{A}$ και $\mathrm{B}$.

**β)** Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z|$ και να προσδιορίσετε τον $z$ για τον οποίο το $|z|$ παίρνει την ελάχιστη τιμή.

**γ)** Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς για τους οποίους: $z = w$.

---

[1] Οι *Σημειώσεις* του 2007 βρίσκονται αναρτημένες στη ηλεκτρονική διεύθυνση: http://dide.tri.sch.gr/ στην επιλογή Σχ. Σύμβ. Μαθηματικών.
[2] Η Αναλυτική Γεωμετρία που "παράγεται" από γεωμετρικούς τόπους εικόνων μιγαδικών αριθμών.

**ΘΕΜΑ 16⁰**

**α)** Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς $z$ για τους οποίους ισχύουν οι ισότητες:

$\frac{1}{2}|z+1| = \left|z-\frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ :(1)

**β)** Αν $z_1 = 1-i$ και $z_2 = 1+i$ είναι οι μιγαδικοί αριθμοί που ικανοποιούν τις (1), να αποδείξετε ότι: $z_1^{2008} + z_2^{2008} = 2^{1005}$

**ΘΕΜΑ 17⁰**

Αν $z_1, z_2$ είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$z_1 - 3\overline{z}_2 = -6-2i$ και $2\overline{z}_1 + z_2 = 9-3i$, τότε να βρείτε:

**α)** Τους $z_1$ και $z_2$.

**β)** Τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha$ και $\beta$ για τους οποίους η εξίσωση $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ έχει ρίζες τους $z_1$ και $z_2$.

**ΘΕΜΑ 18⁰**

Έστω $z$ και $w$ μιγαδικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε: $z^2 + w^2 = 6wi - 6zi + 18$ .
Να εκφράσετε τους $z$ ως συνάρτηση των $w$.

**ΘΕΜΑ 19⁰**

Να βρείτε τον μιγαδικό $z$, με $\text{Re}(z) > 0$, για τον οποίο ισχύει: $|z+1| = 4z - 2\overline{z} - 6i$.

**ΘΕΜΑ 20⁰**

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς $z$ ισχύει $|z|=1$, να αποδείξετε ότι ισχύει και: $\left|\frac{w_1 z + w_2}{\overline{w}_2 z + \overline{w}_1}\right| = 1$, όπου $w_1$ και $w_2$ συγκεκριμένοι μιγαδικοί αριθμοί, οι εικόνες των οποίων δεν ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου.

**ΘΕΜΑ 21⁰**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z$ που οι εικόνες τους ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

**Α)** Να αποδείξετε ότι:

**α)** Και οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $w = \frac{az-i}{iz+a}$ , όπου $a \in R - \{-1,1\}$, ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

**β)** $|w-z| \le 2$ και $|z^2+1| \le 2|a+iz|$

**Β)** Έστω $a = 0$.

Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ζεύγη $(z, w)$ για καθένα από τα οποία ισχύει: $|z - w| = 2$.

**ΘΕΜΑ 22$^0$**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \dfrac{\alpha^\nu - \beta i}{\beta + \alpha^\nu i}$ και $w = \dfrac{z + \gamma\delta^2}{z + \gamma}$ με την ιδιότητα: «η εικόνα του $w$ ανήκει στον κύκλο του μιγαδικού επιπέδου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\delta$», όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ συγκεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$, $0 < \gamma < 1 < \delta$ και $\nu$ θετικός ακέραιος.

Να αποδείξετε ότι:

**α)** Η εικόνα του $z$ ανήκει στον κύκλο του μιγαδικού επιπέδου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

**β)** Οι αριθμοί $\gamma$ και $\delta$ είναι αντίστροφοι.

**ΘΕΜΑ 23$^0$**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z$ για τους οποίους:

$|\overline{z} + i| = \left|2z - \dfrac{i}{2}\right|$ και οι $w = x + (x + 4)i$, όπου $x$ μεταβλητή που διατρέχει το διάστημα $[-4, 0]$ των πραγματικών αριθμών.

**α)** Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των $z$ ανήκουν στον κύκλο του μιγαδικού επιπέδου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\dfrac{1}{2}$.

**β)** Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z - w|$ και να προσδιορίσετε τους $z$ και $w$ για τους οποίους η παράσταση $|z - w|$ παίρνει την ελάχιστη τιμή.

**ΘΕΜΑ 24$^0$**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $u, v, w$ τέτοιοι, ώστε $|u| = |v| = |w| = k$, όπου $k > 0$, και ο μιγαδικός $z = \dfrac{uv + vw + wu}{u + v + w}$.

Να αποδείξετε ότι:

**Α.α)** $\overline{z} = \dfrac{k^2}{z}$

**β)** Οι εικόνες των $z, u, v, w$ ανήκουν στον ίδιο κύκλο C του μιγαδικού επιπέδου.

**Β.α)** Ο αριθμός $(u + \overline{v})(v + \overline{w})(w + \overline{u})$ είναι πραγματικός.

**β)** Ο αριθμός $\dfrac{u^3 + v^3}{(u - v)^3}$ είναι φανταστικός.

**γ)** Αν μεταξύ των εικόνων των αριθμών $u, v, w$ δεν υπάρχουν δύο οι οποίες να είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου C ή άκρα χορδής του παράλληλης προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών, τότε οι εικόνες των αριθμών $\left(u+\overline{v}\right)\left(v+\overline{w}\right)\left(w+\overline{u}\right)$, $\dfrac{u^3+v^3}{\left(u-v\right)^3}$ και $\dfrac{u^3+v^3}{\left(v-u\right)^3}$ σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο.

**Σχόλιο $1^0$**

Οι τρεις αριθμοί $u, v, w$ είναι στοιχεία του συνόλου $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. Και τα στοιχεία ενός συνόλου –από απαίτηση της αρχικής έννοιας "σύνολο"– θεωρούνται διαφορετικά μεταξύ τους. Έτσι, στο $24^0$ θέμα οι $u, v, w$ θεωρούνται διαφορετικοί μεταξύ τους, χωρίς αυτό να τονίζεται ιδιαίτερα.

[Ο G. Cantor περιέγραψε ως εξής την αρχική έννοια του "συνόλου": «Με τη λέξη "σύνολο" εννοούμε μία οποιαδήποτε συνάθροιση σε ολότητα οριστικών και διακεκριμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας».]

**Σχόλιο $2^0$**

Στο ερώτημα Β.β) του $24^{ου}$ θέματος μπορεί κανείς να ζητήσει ν' αποδειχτεί ότι ακόμη δύο αριθμοί (:προφανείς συμμετρικές παραστάσεις) είναι φανταστικοί. Όσον αφορά δε, στους περιορισμούς γεωμετρικής υφής που τίθενται στο ερώτημα Β.γ), αυτοί εξασφαλίζουν τη δυνατότητα ύπαρξης του τριγώνου που στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι είναι ισοσκελές. Συγκεκριμένα, αποκλείουν την δυνατότητα μηδενισμού των τριών αριθμών $\left(u+\overline{v}\right)\left(v+\overline{w}\right)\left(w+\overline{u}\right)$, $\dfrac{u^3+v^3}{\left(u-v\right)^3}$, $\dfrac{u^3+v^3}{\left(v-u\right)^3}$ και συνακόλουθα ότι οι εικόνες τους είναι συνευθειακά σημεία του μιγαδικού επιπέδου. (Οι συλλογισμοί που απαιτούνται για την αναγκαία μετάφραση των εν λόγω γεωμετρικών περιορισμών στην αλγεβρική γλώσσα, προκύπτουν και ερμηνεύονται πιο εύκολα με τη συμβολή κατάλληλης γεωμετρικής εποπτείας που εστιάζεται σε συμμετρίες ως προς το κέντρο και τους άξονες που ορίζουν το μιγαδικό επίπεδο.)

## ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

**…**Και επειδή τα Μαθηματικά δεν είναι μόνον "κλασσικές" ή "πρωτότυπες" ασκήσεις –και, μάλιστα, διατυπωμένες επακριβώς στο πρότυπο της δομής και του ύφους που "επέβαλαν" οι Πανελλαδικές Εξετάσεις–, στις *Σημειώσεις* ενδεικτικού διδακτικού υλικού, που σχεδιάζουμε κατά διαστήματα, συμπεριλαμβάνουμε και εισαγωγικού χαρακτήρα *σημειώματα ειδικών θεμάτων* με αιχμές θεωρητικού, διδακτικού ή ιστορικο-μαθηματικού ενδιαφέροντος – που, συνήθως, έχουν μόνον ενημερωτικό χαρακτήρα καθώς δεν συμπεριλαμβάνονται στην σχολική ύλη.

Το κείμενο που ακολουθεί εντάσσεται στα *σημειώματα* αυτού του τύπου.

### Λίγα λόγια για τις συναρτήσεις του Möbius (Moebius) με αφορμή το $21^0$ θέμα

Στο παραπάνω $21^0$ θέμα, ο $w$ είναι μία μιγαδική συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής, της $z$, η οποία διατρέχει το σύνολο $D=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z\right|=1\right\}$. Η συνάρτηση αυτή, $f\left(z\right)=w=\dfrac{az-i}{iz+a}$, ανήκει σε μία ειδική κατηγορία μιγαδικών συναρτήσεων που στην βιβλιογραφία αναφέρονται ως συναρτήσεις (ή μετασχηματισμοί) του Möbius.

*Ορισμός*: Οι συναρτήσεις $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ με τύπο μορφής $f(z)=w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, όπου οι $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ είναι γενικά δεδομένοι μιγαδικοί αριθμοί, καλούνται συναρτήσεις (ή μετασχηματισμοί) του Möbius.

*Παρατηρήσεις*:

Θα αναζητήσουμε μια συνθήκη μεταξύ των $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ η οποία θα καθιστά, πρώτον, πιο ενδιαφέρουσες γεωμετρικά τις εν λόγω συναρτήσεις (οι εικόνες της $f$ να μην είναι μονοσύνολα) και δεύτερον, να προκύπτει ότι τα διατεταγμένα ζεύγη $(\gamma,\delta),(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)$ και $(\beta,\delta)$ έχουν τιμή διαφορετική της $(0,0)$.

Από τον τύπο $f(z)=w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, βλέπουμε πως, αν $\gamma=0$, τότε πρέπει υποχρεωτικά $\delta\neq 0$. Ενώ, αν $\gamma\neq 0$, ο τύπος της $f$ μπορεί να πάρει την επόμενη κομβική μορφή:

$$f(z)=w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma}\cdot\frac{1}{\gamma z+\delta} \quad :(1)$$

Από την τελευταία αυτή μορφή του $f(z)$ βλέπουμε πως, αν $\alpha\delta-\beta\gamma=0$, τότε προκύπτει $f(z)=w=\dfrac{\alpha}{\gamma}$. Στην περίπτωση αυτή, οι εικόνες των $z$ αντιστοιχίζονται, μέσω της $f$, στο μοναδικό σημείο (εικόνα) $\dfrac{\alpha}{\gamma}$ του μιγαδικού επιπέδου. Κάτι τέτοιο όμως αποτελεί μία τετριμμένη περίπτωση και προφανώς δεν παρουσιάζει, τουλάχιστον γεωμετρικά, κάποιο ενδιαφέρον. Γι' αυτό και οι συναρτήσεις του Möbius[3] θεωρούνται με την υπόθεση $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$. Στο σημείο αυτό παρατηρείστε πως, δεδομένης της υπόθεσης $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$, εξασφαλίζεται ότι τα διατεταγμένα ζεύγη $(\gamma,\delta),(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)$ και $(\beta,\delta)$ έχουν τιμή διαφορετική της $(0,0)$. Και πως με $\gamma\neq 0$ ισχύει η παραπάνω κομβική μορφή (1).

Ας έλθουμε τώρα πάλι στο α) ερώτημα του 21$^{ου}$ θέματος για να εξετάσουμε τι συμβαίνει όταν το $a$ γίνει 1 ή -1, στο πλαίσιο της παραπάνω κομβικής μορφής (1):

Με $a=1$ προκύπτει $w=\dfrac{z-i}{iz+1}$ (με $z\neq i$: απαίτηση λόγω του παρονομαστή) και επειδή τότε μηδενίζεται η παράσταση $\alpha\delta-\beta\gamma$, εφαρμόζοντας την κομβική μορφή (1) βρίσκουμε ότι όλοι οι αριθμοί $z\neq i$, με την ιδιότητα $|z|=1$, αντιστοιχίζονται μέσω της $f$ στον $w=-i$ για τον οποίο ισχύει: $|w|=1$. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει πως, όταν $a=1$, ο μοναδιαίος κύκλος των εικόνων των $z$ (με εξαίρεση την εικόνα του $z=i$) απεικονίζεται στην εικόνα του $w=-i$ που ανήκει στον ίδιο κύκλο.

[3] Στη σχετική βιβλιογραφία οι συναρτήσεις του Möbius με την υπόθεση $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ αναφέρονται και ως ομογραφικές συναρτήσεις.

Με $a=-1$ προκύπτει $w=\dfrac{-z-i}{iz-1}$ (με $z\neq -i$: απαίτηση λόγω του παρονομαστή) και επειδή τότε μηδενίζεται η παράσταση $\alpha\delta-\beta\gamma$, εφαρμόζοντας την κομβική μορφή (1) βρίσκουμε ότι όλοι οι αριθμοί $z\neq -i$, με την ιδιότητα $|z|=1$, αντιστοιχίζονται μέσω της $f$ στον $w=i$ για τον οποίο ισχύει: $|w|=1$. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει πως, όταν $a=-1$, ο μοναδιαίος κύκλος των εικόνων των $z$ (με εξαίρεση την εικόνα του $z=-i$ ) απεικονίζεται στην εικόνα του $w=i$ που ανήκει στον ίδιο κύκλο.

Τέλος, έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι, η συνάρτηση Möbius του 21$^{ου}$ θέματος γεωμετρικά μετασχημάτισε κύκλο (:εικόνες των $z$) σε κύκλο (:εικόνες των $w$) του μιγαδικού επιπέδου (Γενικά οι συναρτήσεις του Möbius απεικονίζουν κύκλους ή ευθείες σε κύκλους ή ευθείες).

Υπό το πνεύμα (και) της θεωρίας που αναπτύχθηκε στο *σημείωμα* αυτό, μπορούμε να δούμε επίσης και τα θέματα $20^0$ και $22^0$.

**Βιβλιογραφικές πηγές:**

[1] Hans Schwerdtfeger. (1979). "*Geometry of Complex Numders*", New York: Dover Publications, Inc.

[2] Περιοδικό Ευκλείδης Β΄ της Ε.Μ.Ε.

[3] Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ. (2007). "*Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου*", Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

[4] Προς δημοσίευση άρθρο του Δ. Ντρίζου: "*Μιγαδικοί αριθμοί – Η Γεωμετρία των Μιγαδικών Αριθμών*".