ΕΝΑ ΘΕΜΑ
ΑΠΟ ΣΥΝΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΣΕΠΤ. 2010)
ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Δημήτριος Ντρίζος
Σχολικός Σύμβουλος, Μέλος της ΣΕ του ΕΥΚΛΕΙΔΗ Γ΄

Το κείμενο αυτό αφιερώνεται στη μνήμη
του φίλου μαθηματικού Νίκου Ζαφείρη

Στο κείμενο που ακολουθεί διατυπώνεται ένα θέμα από την ύλη των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου, με σύντομες ενδεικτικές λύσεις. Οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις του εν λόγω θέματος –με τη συμβολή των οποίων οπτικοποιούνται τα δεδομένα και τα ζητούμενά του– παρουσιάστηκαν διεξοδικά από τον Δ. Ντρίζο (με τη συμβολή power point) σε προγραμματισμένες συναντήσεις καθηγητών μαθηματικών που διδάσκουν σε Λύκεια, στο πλαίσιο της ενότητας: *Η Γεωμετρία των Μιγαδικών Αριθμών* (9 και 23 Σεπτ. 2010 στην Καρδίτσα και τα Τρίκαλα αντιστοίχως).

ΘΕΜΑ

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 3\alpha + 10\beta i$ και $z_2 = 3\gamma + 10\beta i$ για τους οποίους ισχύει $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$
Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $f(x) = 5x^7 + 4x^5 - 3\alpha\gamma x$, $x \in \mathbb{R}$

Β1. Να αποδείξετε ότι $100\beta^2 + 9\alpha\gamma = \operatorname{Re}(\overline{z}_1 z_2) = 0$

Β2. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 δεν είναι σημεία των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου και ότι οι διανυσματικές τους ακτίνες τέμνονται κάθετα.

Β3. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$

Β4. Να αποδείξετε ότι αριθμοί $w_1 = \dfrac{z_1}{z_2}$ και $w_2 = \dfrac{z_2}{z_1}$ είναι φανταστικοί με $\operatorname{Im}(w_1) = \dfrac{30\beta(\gamma - \alpha)}{9\gamma^2 + 100\beta^2}$ και $\operatorname{Im}(w_2) = \dfrac{-30\beta(\gamma - \alpha)}{9\alpha^2 + 100\beta^2}$

Β5. Αν $\alpha = -\gamma$, να αποδείξετε ότι στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες των αριθμών w_1 και w_2 ισαπέχουν από την εικόνα του αριθμού -1

Ενδεικτικές λύσεις

Β1. Με άμεση αντικατάσταση των $z_1 = 3\alpha + 10\beta i$ και $z_2 = 3\gamma + 10\beta i$ στην υπόθεση $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$ και εφαρμόζοντας τον ορισμό του μέτρου μιγαδικού αριθμού καταλήγουμε στο ζητούμενο $100\beta^2 + 9\alpha\gamma = 0$
Είναι $\overline{z}_1 z_2 = \left(100\beta^2 + 9\alpha\gamma\right) + 30\beta(\alpha - \gamma)i$, οπότε και $\mathrm{Re}\left(\overline{z}_1 z_2\right) = 0$
Σχόλιο
Ξεκινώντας από την υπόθεση $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$, τετραγωνίζοντας τα μέλη της, και εφαρμόζοντας γνωστές ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών καταλήγουμε πάλι (με άλλο τρόπο) στη σχέση $\mathrm{Re}\left(\overline{z}_1 z_2\right) = 0$

Β2. Από το Β1 παίρνουμε $\alpha\gamma = -\dfrac{100}{9}\beta^2$ και καθώς δίνεται $\beta \neq 0$ προκύπτει $\alpha \neq 0$ και $\gamma \neq 0$ Οπότε οι εικόνες των z_1 και z_2 δεν είναι σημεία των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου.
Έστω Μ και Ν οι εικόνες των z_1 και z_2 αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο. Τότε για τις διανυσματικές ακτίνες των z_1 και z_2 έχουμε
$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = (3\alpha, 10\beta)$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = (3\gamma, 10\beta)$ και επομένως $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ON}} = 9\alpha\gamma + 100\beta^2$
Και λόγω του Β1 παίρνουμε $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ON}} = 0$
Από την ισότητα $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ON}} = 0$ προκύπτει ότι οι διανυσματικές ακτίνες $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ είναι κάθετες (ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων).

Β3. $f(x) = 5x^7 + 4x^5 - 3\alpha\gamma x$, $x \in \mathbb{R}$
και $f'(x) = 35x^6 + 20x^4 - 3\alpha\gamma$, $x \in \mathbb{R}$
Είναι $f'(x) > 0$ αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν $35x^6 \geq 0$, $20x^4 \geq 0$ και $-3\alpha\gamma > 0$, καθώς από το Β1 προκύπτει $\alpha\gamma = -\dfrac{100}{9}\beta^2 < 0$ εφόσον $\beta \neq 0$
Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, άρα 1-1 και συνεπώς η f αντιστρέφεται.
Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^7 + 4x^5 - 3\alpha\gamma x = 0 \Leftrightarrow x\left(5x^6 + 4x^4 - 3\alpha\gamma\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, καθώς $5x^6 + 4x^4 - 3\alpha\gamma > 0$. Άρα μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι η $x = 0$
Ισχύουν οι ισοδυναμίες $f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow x = f(0) \Leftrightarrow x = 0$. Δηλαδή η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$

Β4. Από το ερώτημα Β1 έχουμε $\mathrm{Re}\left(\overline{z}_1 z_2\right) = 0$, οπότε ο αριθμός $\overline{z}_1 z_2$ είναι φανταστικός. Και ανάλογα προκύπτει ότι και ο αριθμός $\overline{z}_2 z_1$ είναι επίσης φανταστικός.
Με αυτές τις σκέψεις, για το Β4 έχουμε:
$w_1 = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \dfrac{1}{|z_2|^2} \cdot z_1\overline{z}_2$, που είναι φανταστικός αριθμός κ.τ.λ.

Σχόλια

Δίνουμε δυο ακόμη τρόπους λύσης του Β4:

1. $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2| \Leftrightarrow \left|z_2\left(\dfrac{z_1}{z_2} - 1\right)\right| = \left|z_2\left(\dfrac{z_1}{z_2} + 1\right)\right|$

$$\Leftrightarrow |z_2||w_1 - 1| = |z_2||w_1 + 1|$$
$$\Leftrightarrow |w_1 - 1| = |w_1 + 1|$$
$$\ldots \Leftrightarrow \overline{w}_1 = -w_1 \text{ κ.τ.λ.}$$

2. Με άμεση αντικατάσταση των $z_1 = 3\alpha + 10\beta i$ και $z_2 = 3\gamma + 10\beta i$ στη σχέση $w_1 = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}$ και παίρνοντας υπόψη ότι $100\beta^2 + 9\alpha\gamma = 0$ βρίσκουμε πάλι ότι ο αριθμός w_1 είναι φανταστικός με $\mathrm{Im}(w_1) = \dfrac{30\beta(\gamma - \alpha)}{9\gamma^2 + 100\beta^2}$ κ.τ.λ.

Β5. Καταρχάς με $\alpha = -\gamma$ προκύπτει $w_1 = -w_2$ οπότε και $|w_1| = |-w_2| = |w_2|$ Οι εικόνες των w_1 και w_2 θα ισαπέχουν από την εικόνα του -1 αν αποδείξουμε ότι $|w_1 - (-1)| = |w_2 - (-1)|$ κ.τ.λ.

Επικοινωνία:
drizosdim@yahoo.gr
http://dide.tri.sch.gr Επιλογή Σχ. Σύμβ. Μαθηματικών