Ενδεικτικές απαντήσεις θεμάτων
της εργασίας: ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ (2), 2008

Του **Δημητρίου Α. Ντρίζου**
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών

ΘΕΜΑ 18^0

Οι επόμενες ισότητες είναι διαδοχικά ισοδύναμες:

$$z^2 + w^2 = 6wi - 6zi + 18$$
$$z^2 + 6zi - 9 + w^2 - 6wi - 9 = 0$$
$$(z+3i)^2 + (w-3i)^2 = 0 \quad :(*)$$
$$(z+3i)^2 - \left[(w-3i)i\right]^2 = 0$$
$$(z+3i+wi+3)(z+3i-wi-3) = 0$$
$$z = -3-(w+3)i \quad \text{ή} \quad z = 3-(3-w)i$$

Με αφορμή τη σχέση (*) να επισημανθεί ότι η ισοδυναμία $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$ *ισχύει μόνον όταν οι αριθμοί* α, β *είναι πραγματικοί* κ.τ.λ.

ΘΕΜΑ 19^0

Με $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha > 0$, η ισότητα $|z+1| = 4z - 2\overline{z} - 6i$ διαδοχικά γίνεται:

$$\left|(\alpha+1) + \beta i\right| = 4\alpha + 4\beta i - 2\alpha + 2\beta i - 6i$$
$$\sqrt{(\alpha+1)^2 + \beta^2} + 0i = 2\alpha + 6(\beta-1)i$$
$$6(\beta-1) = 0 \text{ και } \sqrt{(\alpha+1)^2+\beta^2} = 2\alpha$$
$$\beta = 1 \text{ και } \sqrt{\alpha^2+2\alpha+2} = 2\alpha \text{ με } \alpha > 0$$
$$\beta = 1 \text{ και } 3\alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0$$
$$\beta = 1 \text{ και } \alpha = \frac{1+\sqrt{7}}{3}\text{. Οπότε } z = \frac{1+\sqrt{7}}{3} + i$$

ΘΕΜΑ 20^0

Λόγω των ισοδυναμιών: $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\overline{z} = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$ και εφαρμόζοντας ιδιότητες του μέτρου και των συζυγών μιγαδικών αριθμών, παίρνουμε τις επόμενες ισότητες: $\left|\dfrac{w_1 z + w_2}{\overline{w}_2 z + \overline{w}_1}\right| = \dfrac{|w_1 z + w_2|}{\left|\overline{\overline{w}_2 z + \overline{w}_1}\right|} = \dfrac{|w_1 z + w_2|}{|w_2 \overline{z} + w_1|} = \dfrac{|w_1 z + w_2|}{\left|w_2 \dfrac{1}{z} + w_1\right|} = \dfrac{|w_1 z + w_2|}{\left|\dfrac{w_2 + w_1 z}{z}\right|} = \dfrac{|z||w_1 z + w_2|}{|w_2 + w_1 z|} = 1$

Σκέψεις στο πλαίσιο ελέγχου των υποθέσεων

Είναι επαρκής ο περιορισμός που τέθηκε για τους w_1 και w_2; Ικανοποιείται σε κάθε περίπτωση η απαίτηση $\overline{w}_2 z+\overline{w}_1 \neq 0$, σε συνδυασμό με την υπόθεση $|z|=1$;

Καταρχήν ο περιορισμός που τέθηκε για τους w_1 και w_2 αποκλείει την δυνατότητα να είναι συγχρόνως 0 οι w_1 και w_2 .

Έστω ότι είναι 0 (μόνον) ο w_1. Τότε η αποδεικτέα ισότητα προφανώς ισχύει. Το ίδιο συμβαίνει και όταν είναι 0 (μόνον) ο w_2 .

Στην περίπτωση που κανένας εκ των w_1 και w_2 δεν είναι 0, μήπως ο z θα μπορούσε να πάρει την απαγορευτική, λόγω του παρονομαστή, τιμή $-\dfrac{\overline{w_1}}{\overline{w_2}}$;

Ισχυρισμός: $z=-\dfrac{\overline{w_1}}{\overline{w_2}} \Rightarrow |z|=\left|-\dfrac{\overline{w_1}}{\overline{w_2}}\right| \Rightarrow 1=\left|\overline{\left(\dfrac{w_1}{w_2}\right)}\right| \Rightarrow 1=\left|\dfrac{w_1}{w_2}\right| \Rightarrow |w_1|=|w_2|$, άτοπο.

ΘΕΜΑ 21^0

α) Υπόθεση: $|z|=1$

$$|w|^2=\frac{|az-i|^2}{|iz+a|^2}=\frac{(az-i)(a\overline{z}+i)}{(iz+a)(-i\overline{z}+a)}=\frac{a^2|z|^2+a(z-\overline{z})i+1}{|z|^2+a(z-\overline{z})i+a^2}=1.$$ Άρα $|w|=1$ κ.τ.λ.

Σκέψεις στο πλαίσιο ελέγχου των υποθέσεων

Θα μπορούσε ο z να πάρει την απαγορευτική, λόγω του παρονομαστή, τιμή ai;

Ισχυρισμός: $z=ai \Rightarrow |z|=|ai| \Rightarrow 1=|a|\cdot|i| \Rightarrow |a|=1 \Rightarrow a=1$ ή $a=-1$, άτοπο.

κ.τ.λ.

ΘΕΜΑ 22^0

α) $|z|=\dfrac{\sqrt{(a^n)^2+(-b)^2}}{\sqrt{b^2+(a^n)^2}}=1$

β) Ισχύει $|w|=\delta \Rightarrow \left|\dfrac{z+\gamma\delta^2}{z+\gamma}\right|=\delta \Rightarrow |z+\gamma\delta^2|=\delta|z+\gamma|$. Τετραγωνίζοντας τα μέλη της τελευταίας ισότητας και παίρνοντας υπόψη το ερώτημα α) και τις υπόλοιπες υποθέσεις του θέματος, καταλήγουμε στην σχέση $\gamma\cdot\delta=1$.

ΘΕΜΑ 24^0

Α.α) Από την υπόθεση $|u|=|v|=|w|=k$ παίρνουμε $\overline{u}=\frac{k^2}{u}, \overline{v}=\frac{k^2}{v}, \overline{w}=\frac{k^2}{w}$ και από την $z=\frac{uv+vw+wu}{u+v+w}$ διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\overline{z}=\frac{\frac{k^4}{uv}+\frac{k^4}{vw}+\frac{k^4}{wu}}{\frac{k^2}{u}+\frac{k^2}{v}+\frac{k^2}{w}}=k^2\frac{w+u+v}{vw+uw+uv}=k^2\frac{1}{z}\ .$$

Α.β) Από το ερώτημα Α.α) βρίσκουμε $|z|=k$ κ.τ.λ.

Β.α) Βρίσκουμε $\overline{(u+\overline{v})(v+\overline{w})(w+\overline{u})}=(u+\overline{v})(v+\overline{w})(w+\overline{u})$

Β.β) Βρίσκουμε $\overline{\left(\frac{u^3+v^3}{(u-v)^3}\right)}=-\frac{u^3+v^3}{(u-v)^3}$

Β.γ) Οι εικόνες Β και Γ των αριθμών $\frac{u^3+v^3}{(u-v)^3}$ και $\frac{u^3+v^3}{(v-u)^3}$ ανήκουν στον άξονα των φανταστικών αριθμών και είναι σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή Ο των αξόνων. Ενώ, η εικόνα Α του αριθμού $(u+\overline{v})(v+\overline{w})(w+\overline{u})$ ανήκει στον άξονα των πραγματικών αριθμών ο οποίος είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ. Επομένως ΑΒ = ΒΓ, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.