Η ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ
(ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ)

Του **Δ. Ντρίζου**
Σχολ. Συμβ. Μαθηματικών
drizosdim@yahoo.gr

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Σε όλους μας η συμμετρία έχει αισθητοποιηθεί πρωτίστως ως μία έννοια γεωμετρική. Μία έννοια που την έχουμε συνδέσει στο μυαλό μας με κάποια χαρακτηριστικά έργα τέχνης, ορισμένα αντικείμενα του φυσικού χώρου ή γεωμετρικά σχήματα, τα οποία έχουν άξονες συμμετρίας ή κέντρο συμμετρίας ή και τα δύο: Αυτή είναι άλλωστε, σε γενικές γραμμές, η διαισθητική εκδοχή της συμμετρίας. Και αν μας ενδιέφερε εδώ να την προσδιορίσουμε κάπως πιο προσεκτικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι: "Συμμετρία" ενός γεωμετρικού σχήματος είναι κάθε "μετασχηματισμός", ο οποίος μετακινεί το σχήμα με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε η νέα του θέση να μην διακρίνεται από την αρχική του, δηλαδή μετά την μετακίνησή του να φαίνεται σαν να μην έχει μετακινηθεί. Βέβαια, όπως είναι γνωστό σε όλους μας, η συμμετρία, υπό μία αντίστοιχη θεώρηση, λειτουργεί και στο πεδίο της Άλγεβρας –όπου εκεί αισθητοποιείται, κυρίως, με τη μορφή μιας "κυκλικότητας" στην εμφάνιση των μεταβλητών μέσα σε αλγεβρικές παραστάσεις.

Θα μπορούσαμε εδώ να αναφερθούμε σε μία "ατέλειωτη" σειρά θεμάτων αλγεβρικής συμμετρίας. Κάτι τέτοιο όμως δεν εντάσσεται στους στόχους αυτού του εισαγωγικού *σημειώματος* –άλλωστε, γύρω από το ενδιαφέρον αυτό θέμα έχουν δημοσιευτεί αρκετές μονογραφίες και αναπτύχθηκε μία πλούσια και, σε πολλές των περιπτώσεων, εξαιρετικής ποιότητας αρθρογραφία.

Εν προκειμένω –και με στόχο να καταδείξουμε το είδος της αλγεβρικής συμμετρίας στην οποία αναφερόμαστε– διατυπώνουμε ορισμένα απλά παραδείγματα, τα οποία προσφέρονται στην ανάπτυξη της κεντρικής ιδέας αυτού του *σημειώματος*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Αν $x + y + z + xyz = 0$, να αποδειχτεί ότι:

$$\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + 3 = -xy - yz - zx$$

Σχόλιο:

Στο παράδειγμα αυτό η αλγεβρική συμμετρία που εμφανίζεται είναι τριών μεταβλητών (των x, y, z), "προσθετική" και "πολλαπλασιαστική" ταυτόχρονα. Ως προς δε το "πλήρες" άθροισμα $x + y + z$, ο αριθμητής του πρώτου κλάσματος υπολείπεται κατά z, του δευτέρου κατά x και του τρίτου κατά y. Στο πλαίσιο αυτής της παρατήρησης αναδεικνύεται η ιδέα της αντικατάστασης του 3 με $\frac{x}{x}+\frac{y}{y}+\frac{z}{z}$. Να σημειώσουμε δε ότι η συγκεκριμένη αντικατάσταση βρίσκεται σε αρμονία προς την μεθοδολογική αρχή, η οποία σε γενικές γραμμές μας λέει ότι: *Όπου διαπιστώνουμε την ύπαρξη αλγεβρικής συμμετρίας, πρέπει να ενεργούμε κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να εμφανίζεται πάλι συμμετρία.*

2. Να αποδειχτεί ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y και z ισχύει: $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq x^2yz + y^2zx + z^2xy$.

Λύση: Φέρνοντας όλους τους όρους στο $1^{ο}$ μέλος, πολλαπλασιάζοντας επί 2 και αναδιατάσσοντας τους προσθεταίους παίρνουμε:

$$\left(x^2y^2 - 2x^2yz + x^2z^2\right) + \left(x^2y^2 - 2y^2zx + y^2z^2\right) + \left(z^2x^2 - 2z^2xy + y^2z^2\right) \geq 0$$

και ισοδύναμα:

$$x^2\left(y - z\right)^2 + y^2\left(z - x\right)^2 + z^2\left(x - y\right)^2 \geq 0 \text{ κ.τ.λ.}$$

3. Να λυθεί το σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix} x^2 - 75 = 10\left(y - 10\right) \\ y^2 - 75 = 10\left(z - 10\right) \\ z^2 - 75 = 10\left(x - 10\right) \end{matrix}\right\}$$

4. Δίνονται δύο ευθείες με εξισώσεις:

$$8^9x + 7^8y = \frac{3\cdot 8^9 + 7^8}{2} \text{ και } 8^9y + 7^8x = \frac{3\cdot 7^8 + 8^9}{2}$$

Να βρεθεί το σημείο τομής τους.

Σχόλιο:

Το $4^{ο}$ παράδειγμα εντάσσεται στα συστήματα "προσθετικής" συμμετρίας δύο μεταβλητών, των οποίων, ο γενικός τρόπος αντιμετώπισης περιγράφεται σε επόμενο σχόλιο.

Στη συνέχεια αυτού του *σημειώματος*[1] διατυπώνουμε μία σειρά παραδειγμάτων, τα οποία αναφέρονται στα συμμετρικά συστήματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Να λυθούν τα συστήματα εξισώσεων:

(i) $\left\{\begin{matrix} x - 8y = 26 \\ y - 8x = -82 \end{matrix}\right\}$ (ii) $\left\{\begin{matrix} 12x + 13y = 14 \\ 12y + 13x = 11 \end{matrix}\right\}$

---

[1] Με το *σημείωμα* αυτό επιχειρείται μία προσέγγιση κάποιων πτυχών της *αλγεβρικής συμμετρίας* η οποία εμφανίζεται στα σχολικά μαθηματικά. Να σημειώσουμε δε ότι, το κείμενο αυτό δεν γράφτηκε με βάση το πλαίσιο οδηγιών για τη διδακτέα σχολική ύλη – και, ως εκ τούτου, προτείνεται ως ένα άρθρο περί την *αλγεβρική συμμετρία*.

(iii) $\begin{Bmatrix} x+y=12 \\ y+z=36 \\ z+x=30 \end{Bmatrix}$ (iv) $\begin{Bmatrix} 8x+y+z=28 \\ 8y+z+x=42 \\ 8z+x+y=70 \end{Bmatrix}$ (v) $\begin{Bmatrix} 2x+y+z=12 \\ 2y+z+x=14 \\ 2z+x+y=18 \end{Bmatrix}$

(vi) $\begin{Bmatrix} xy=6 \\ yz=15 \\ zx=10 \end{Bmatrix}$ (vii) $\begin{Bmatrix} (x+1)(y+2)=2 \\ (y+2)(z+3)=4 \\ (z+3)(x+1)=8 \end{Bmatrix}$

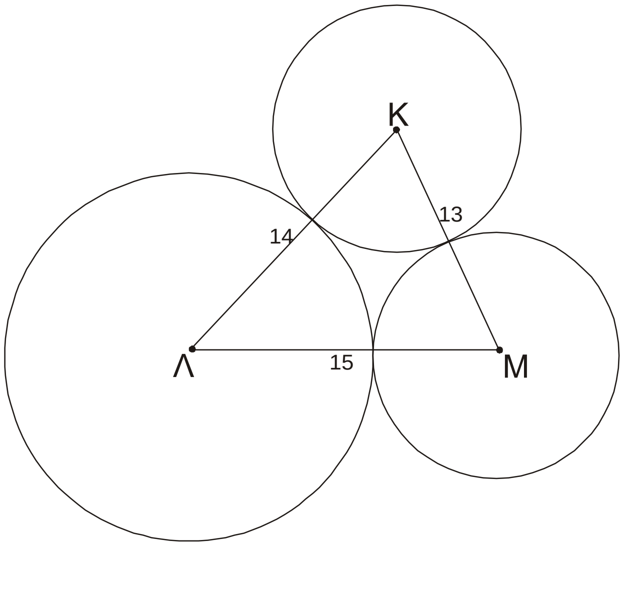
Σχόλιο:

Αν εστιάσει κανείς την προσοχή του στη μορφή των παραπάνω συστημάτων, θα παρατηρήσει ότι η συμμετρία που εμφανίζεται στα πέντε πρώτα συστήματα είναι "προσθετική", ενώ η συμμετρία που εμφανίζεται στα δύο τελευταία είναι "πολλαπλασιαστική". Μεθοδολογικά σημειώνουμε ότι η επίλυση των συστημάτων "προσθετικής" συμμετρίας επιτυγχάνεται διαμέσου των αντιστρεπτών πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, ενώ η επίλυση των συστημάτων "πολλαπλασιαστικής" συμμετρίας γίνεται διαμέσου των αντιστρεπτών πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Και πιο συγκεκριμένα: Στα συστήματα "προσθετικής" συμμετρίας καταρχήν προθέτουμε κατά μέλη όλες τις εξισώσεις και παίρνουμε έτσι μία εξίσωση (*). Στη συνέχεια αφαιρώντας κατά μέλη καθεμιά εξίσωση του συστήματος με την (*) ή κάποια ισοδύναμή της, βρίσκουμε τις τιμές των αγνώστων. Ενώ στα συστήματα "πολλαπλασιαστικής" συμμετρίας πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη όλες τις εξισώσεις και παίρνουμε έτσι μία εξίσωση (*). Και στη συνέχεια διαιρώντας κατά μέλη καθεμιά εξίσωση του συστήματος με την (*) ή κάποια ισοδύναμή της, βρίσκουμε τις τιμές των αγνώστων.

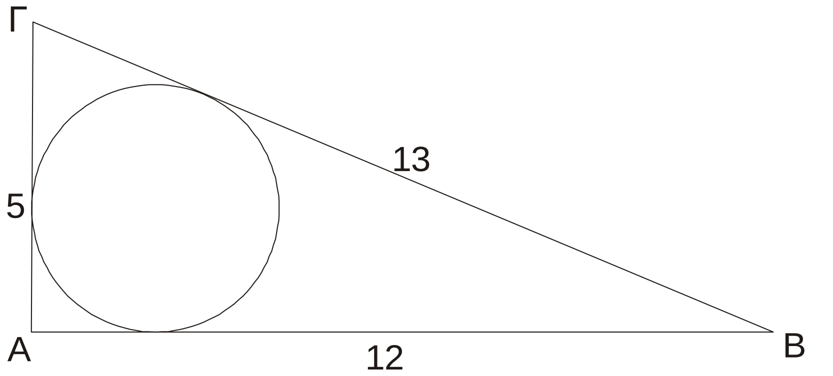
Στη συνέχεια διατυπώνουμε δύο παραδείγματα γεωμετρικής υφής, γνωστά από το γυμνάσιο, που ανάγονται στην επίλυση συστήματος "προσθετικής" συμμετρίας τριών μεταβλητών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω τρίγωνο με πλευρές μήκους 13, 14 και 15. Στο επίπεδο του τριγώνου αυτού θεωρούμε τρεις κύκλους με κέντρα τις κορυφές του τριγώνου, οι οποίοι ανά δύο εφάπτονται εξωτερικά μεταξύ τους. Να βρεθούν οι ακτίνες τους x, y και z.



2. Έστω τρίγωνο με πλευρές μήκους 5, 12 και 13. Ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου αυτού χωρίζει κάθε πλευρά του σε δύο τμήματα.



Να βρεθεί το μήκος των έξι τμημάτων που ορίζονται συνολικά με αυτον τον τρόπο πάνω στις τρεις πλευρές του.

Τέλος, κλείνουμε το *σημείωμα* αυτό με τρία παραδείγματα εισαγωγικού χαρακτήρα από την περιοχή των συναρτησιακών εξισώσεων, η λύση των οποίων ανάγεται στην επίλυση γραμμικού συστήματος "προσθετικής" συμμετρίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση $f(1-x)+3f(x)=10x+17$.
Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση: Αντικαθιστώντας στην εξίσωση $f(1-x)+3f(x)=10x+17$ την μεταβλητή x με την $1-x$ βρίσκουμε $f(x)+3f(1-x)=-10x+27$. Οι δύο αυτές εξισώσεις αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα "προσθετικής" συμμετρίας με αγνώστους τους $f(x)$ και $f(1-x)$, από το οποίο με απαλοιφή του $f(1-x)$ βρίσκουμε $f(x)=5x+3$.

2. Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση $f(3-x)-4f(x)=-30x+6$.
Να βρεθεί ο τύπος της f.

3. Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση $f(-x)+5f(x)=28x+12$.
Να βρεθεί ο τύπος της f.

□