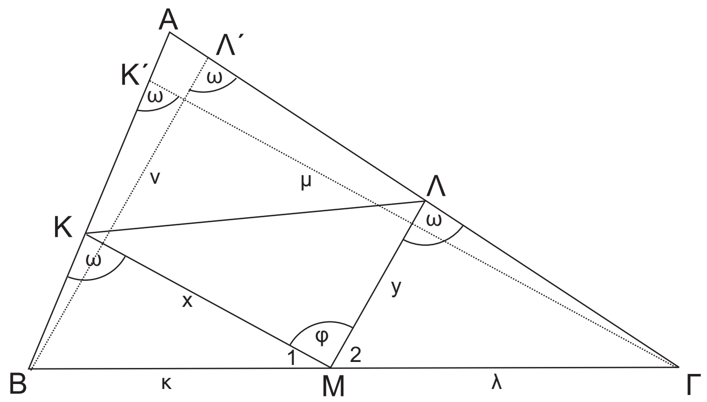
Πρόβλημα 1.3. που διατυπώνεται στην εργασία μας: Προτάσεις επί της διδασκαλίας ορισμένων θεμάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ, που "κινείται" στην πλευρά ΒΓ. Φέρνουμε τα τμήματα ΜΚ και ΜΛ, όπου Κ σημείο της πλευράς ΑΒ και Λ σημείο της πλευράς ΑΓ, τέτοια ώστε $\widehat{BKM} = \widehat{M\Lambda\Gamma} = \widehat{\omega}$, όπου $\widehat{\omega}$ γωνία με το ίδιο σταθερό μέτρο για οποιαδήποτε θέση του Μ.
Να προσδιοριστεί η θέση του Μ στη ΒΓ, ώστε το μήκος του τμήματος ΚΛ να γίνεται ελάχιστο.

(ΜΙΑ) ΛΥΣΗ:



Θεωρούμε τα τμήματα ΒΛ΄ // ΜΛ και ΓΚ΄ // ΜΚ.
Για οποιαδήποτε θέση του Μ στην πλευρά ΒΓ, τα τμήματα ΒΛ΄ και ΓΚ΄ είναι μοναδικά, οπότε το μήκος τους είναι σταθερό.
Επίσης, η γωνία $\widehat{K M \Lambda}$ έχει σταθερό μέτρο, γιατί:

$$\begin{aligned}\widehat{KM\Lambda} &= 180^\circ - \widehat{M}_1 - \widehat{M}_2 \\ &= 180^\circ - \left(180^\circ - \widehat{B} - \widehat{\omega}\right) - 180^\circ - \left(180^\circ - \widehat{\Gamma} - \widehat{\omega}\right) \\ &= \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + 2\widehat{\omega} - 180^\circ,\end{aligned}$$

που είναι γωνία σταθερού μέτρου, αφού $\widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ και $\widehat{\omega}$ σταθερές.

Για λόγους απλοποίησης των συμβόλων, ονομάζουμε:

$$MK = x,\ M\Lambda = y,\ B\Lambda' = \nu,\ \Gamma K' = \mu,\ \widehat{KM\Lambda} = \varphi,\ BM = \kappa,\ M\Gamma = \lambda,$$

όπου τα x, y, κ, λ, είναι μεταβλητές ποσότητες, αφού εξαρτώνται από τη θέση του Μ επί της ΒΓ, ενώ τα ν, μ είναι σταθερές και κ + λ = ΒΓ := α, α σταθερό.

Τα τρίγωνα ΓΜΛ και ΓΒΛ΄ είναι όμοια, άρα ισχύει:

$$\frac{y}{\nu} = \frac{\lambda}{\kappa+\lambda} \Leftrightarrow y = \frac{\nu\lambda}{\alpha} \Leftrightarrow y = \frac{\nu}{\alpha}(\alpha-\kappa)$$

Επίσης, τα τρίγωνα ΒΚΜ και ΒΚ΄Γ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{x}{\mu} = \frac{\kappa}{\kappa+\lambda} \Leftrightarrow x = \frac{\mu}{\alpha}\kappa$$

Στο τρίγωνο ΜΚΛ εφαρμόζουμε το θεώρημα των συνημιτόνων για την πλευρά ΚΛ.

$$\begin{aligned} K\Lambda^2 &= x^2 + y^2 - 2xy\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi \\ &= \frac{\mu^2}{\alpha^2}\kappa^2 + \frac{\nu^2}{\alpha^2}(\alpha-\kappa)^2 - 2\frac{\nu\mu}{\alpha^2}(\alpha\kappa-\kappa^2)\sigma\upsilon\nu\varphi \\ &= \frac{\mu^2}{\alpha^2}\kappa^2 + \nu^2 + \frac{\nu^2}{\alpha^2}\kappa^2 - 2\frac{\nu^2}{\alpha}\kappa - 2\frac{\nu\mu}{\alpha}\kappa\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi + 2\frac{\nu\mu}{\alpha^2}\kappa^2\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi \end{aligned}$$

Δηλαδή, $K\Lambda^2 = \dfrac{\mu^2+\nu^2+2\mu\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi}{\alpha^2}\cdot\kappa^2 - 2\dfrac{\nu^2+\mu\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi}{\alpha}\cdot\kappa + \nu^2$: (1)

Παρατηρούμε ότι το $K\Lambda^2$ εκφράζεται ως τριώνυμο 2ου βαθμού ως προς κ, με συντελεστή του κ^2 το $\dfrac{\mu^2+\nu^2+2\mu\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi}{\alpha^2}$.

Ομως, $\mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = (\mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu) + (2\mu\nu + 2\mu\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi) =$
$= (\mu - \nu)^2 + 2\mu\nu(1 + \sigma\upsilon\nu\varphi) > 0$, αφού $\sigma\upsilon\nu\varphi > -1$.

Επομένως, το $K\Lambda^2$ παίρνει ελάχιστη τιμή όταν: $\kappa = -\dfrac{B}{2A}$, δηλαδή:

$$\kappa = \frac{\dfrac{2(\nu^2+\mu\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi)}{\alpha}}{\dfrac{2(\mu^2+\nu^2+2\mu\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi)}{\alpha^2}} = \frac{\alpha\nu^2+\alpha\mu\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi}{\mu^2+\nu^2+2\mu\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Δηλαδή, το ΚΛ γίνεται ελάχιστο, όταν το σημείο Μ απέχει από την κορυφή

Β σταθερή απόσταση ίση με: $\dfrac{\alpha\nu^2 + \alpha\mu\nu \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}{\mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}$.

Τέλος, στα πλαίσια της πάγιας ερευνητικής πρακτικής, που θέλει να εξετάζουμε κατά πόσον όλα τα αποτελέσματα που βρίσκουμε, μετά από μια μαθηματική επεξεργασία, ικανοποιούν όλες τις υποθέσεις του προβλήματος, θέτουμε το ερώτημα:

Μήπως υπάρχει περίπτωση η τιμή του κ, που υπολογίσαμε, μνα μην αντιστοιχεί πάντα σε σημείο Μ του τμήματος ΒΓ, αλλά το Μ να είναι εξωτερικό σημείο της προέκτασης του ΒΓ;

Για το λόγο αυτό, απαιτείται να διερευνηθεί αν ισχύει πάντα:

$$0 < \kappa < \alpha \quad \text{ή} \quad 0 < \frac{\alpha\nu^2 + \alpha\mu\nu \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}{\mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi} < \alpha$$

και επειδή αποδείξαμε ήδη ότι $\mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi > 0$, αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει:

$$0 < \alpha\nu^2 + \alpha\mu\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi < \alpha(\mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi),$$

που οδηγούν στις: $\sigma\upsilon\nu\varphi > -\dfrac{\nu}{\mu}$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi > -\dfrac{\mu}{\nu}$.

ΑΝΟΙΚΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑ:

Υπάρχει γωνία φ: $0^\circ < \varphi < 180^\circ$, με $\sigma\upsilon\nu\varphi > -\dfrac{\nu}{\mu}$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi > -\dfrac{\mu}{\nu}$, που να αντιστοιχεί σε σημείο Μ, που δεν είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΒΓ;

(Εργασία δημοσιευμένη στο περιοδ. Απολλώνιος, τχ. 3ο, σσ. 121-123, έκδοση του Παραρτήματος Ν. Ημαθίας της Ε.Μ.Ε.)