Η Γεωμετρική Εποπτεία στην Παρουσίαση της Απόλυτης Τιμής

ΜΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ ΣΤΗΝ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Δημήτρης Ντρίζος

Περίληψη*

Με την εργασία μας αυτή θέλουμε να αναδείξουμε τα πλεονεκτήματα της γεωμετρικής εποπτείας, ως ενός ισχυρού διδακτικού μέσου, στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων με απόλυτες τιμές. Για το λόγο αυτό παρουσιάζουμε πρώτα, με αναλυτικό τρόπο, μία πειραματική διδασκαλία που πραγματοποιήσαμε σε δύο τμήματα της Α′ Λυκείου. Η παρουσίαση της μεθόδου που προτείνουμε έγινε μέσα σ' ένα διδακτικό περιβάλλον "πρακτικό–ανακαλυπτικό", όπου οι μαθητές έδιναν λύσεις στηριζόμενοι σε απλές και οικείες τους γεωμετρικές παραστάσεις, χωρίς τη βοήθεια τυποποιημένων αλγεβρικών διαδικασιών. Ασχολούμαστε έπειτα με μία εμπειρική έρευνα που πραγματοποιήσαμε· και στη συνέχεια αναλύουμε και σχολιάζουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν.

* Ένα τμήμα της εργασίας έχει δημοσιευτεί στο περιοδικό της Ε.Μ.Ε. ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Γ′, τεύχος 53-54, Ιανουάριος-Δεκέμβριος 2000, τόμος 17.

Εισαγωγη

Σκοπός της εργασίας μας αυτής είναι να αναδείξουμε τα πλεονεκτήματα της διδακτικής παρουσίασης της έννοιας της απόλυτης τιμής, θεωρούμενης ως απόστασης, έναντι της φορμαλιστικής αντιμετώπισής της – ως ένα σύνολο από τυπικές αλγοριθμικές διαδικασίες.

Θα επικεντρωθούμε κυρίως στη γεωμετρική, αλλά συγχρόνως και στη διαισθητική αντιμετώπιση ορισμένων τυπικών εξισώσεων και ανισώσεων με απόλυτες τιμές που παρουσιάζονται στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α′ Λυκείου.

Πριν εισέλθουμε στο κυρίως θέμα μας, όπου θα προβάλλουμε και θα στηρίξουμε την αναγκαιότητα της γεωμετρικής εποπτείας, ως ενός ισχυρού διδακτικού μέσου, κρίνουμε σκόπιμο να κάνουμε κάποιες επισημάνσεις:

Στα βιβλία των μαθηματικών της Γ′ Γυμνασίου και της Α′ Λυκείου, η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού x ορίζεται ως η απόσταση του x από το 0 (μηδέν) του άξονα των τετμημένων x′x. Στο βιβλίο δε της Άλγεβρας της Α′ Λυκείου ορίζεται επίσης και η απόσταση δύο πραγματικών αριθμών α και β του άξονα x′x, ως η απόλυτη τιμή της διαφοράς α – β ή της διαφοράς β – α.

Η οριοθέτηση αυτή:

α) εμπεριέχει τις προϋποθέσεις ώστε η παρουσίαση εξισώσεων και ανισώσεων με απόλυτες τιμές να μπορεί να γίνει μέσα σε ένα κατάλληλο γεωμετρικό περιβάλλον, όπου ο μαθητής να αισθητοποιεί πλήρως την απόλυτη τιμή ως μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος που έχει τα άκρα του πάνω σε έναν άξονα συντεταγμένων, και,

β) ξεπερνά τις αντιλήψεις για τη διδασκαλία της απόλυτης τιμής που διατυπώθηκαν τα τελευταία 30 χρόνια και στις οποίες κυριαρχούσε η πρακτική "της απομάκρυνσης του συμβόλου της απόλυτης τιμής", διακρίνοντας περιπτώσεις για το πρόσημο της παράστασης που βρίσκεται μέσα στο σύμβολο $|\quad|$ της απόλυτης τιμής.

Τα τελευταία χρόνια η διδακτική αντιμετώπιση κάποιων τυποποιημένων εξισώσεων και ανισώσεων (μορφές του τύπου: $|x| = \theta$, $|x| < \theta$, $|x| > \theta$, όπου θ θετικός αριθμός) γίνεται από την πλειονότητα των καθηγητών των Λυκείων, όχι με τη μέθοδο της απομάκρυνσης του συμβόλου της απόλυτης τιμής, αλλά σύμφωνα με τους αλγόριθμους:

$$|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$$

$$|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$$

$$|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta \text{ ή } x > \theta, \theta\text{: θετικός αριθμός,}$$

οι οποίοι εμφανίστηκαν το 1990 στη σχολική βιβλιογραφία (Άλγεβρα Α′ Λυκείου, Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, κ.ά.) υπό μορφή θεωρίας.

Ιστορικά πρόκειται σαφώς για μία θετική διδακτική μετατόπιση της έννοιας της απόλυτης τιμής. Επισημαίνουμε όμως ότι και σήμερα από τη διαδικασία λύσης θεμάτων, στα οποία παραπάνω αναφερθήκαμε, λείπει σε ουσιαστικό βαθμό η γεωμετρική εποπτεία· δεν γίνεται ιδιαίτερος λόγος για την ισχυρή, λόγω του ορισμού, σύνδεση της απόστασης δύο σημείων του άξονα με την απόλυτη τιμή. Ο μαθητής και σήμερα για να λύσει μια εξίσωση ή ανίσωση με απόλυτες τιμές ενεργεί τελείως μηχανικά, σχεδόν χωρίς να ενδιαφέρεται για το μαθηματικό περιεχόμενο αυτών που γράφει. Ακολουθεί πιστά μια σειρά από συγκεκριμένα "αλγεβρικά" βήματα χωρίς στην πραγματικότητα να αισθητοποιεί την αναγκαιότητα αυτής της πορείας που ακολουθεί και όχι, ίσως, κάποιας άλλης. Ως αποτέλεσμα αυτής της αντιμετώπισης είναι ένα σημαντικό ποσοστό μαθητών να κάνει τα γνωστά "κλασσικά λάθη" – όπως για παράδειγμα: από την $x^2 < 4$ να βρίσκουν τελικά $x < 2$ ή $x < \pm 2$ (η αναφορά μας αυτή είναι τελείως ενδεικτική). Αξίζει στο σημείο τούτο να πούμε ότι η "εικόνα" που έχει σχηματιστεί στο μυαλό του κάθε μαθητή για την έννοια της απόλυτης τιμής – απαλλαγμένης από τη γεωμετρική εποπτεία, είναι το αποτέλεσμα της εμπειρίας που έχει αποκτήσει ο μαθητής μέσα από παραδείγματα που του έχουν αναλυθεί κατά την "πρώτη" πρόσκτηση της γνώσης στο σχολείο και όχι μόνον.

Στοχοι της Διδασκαλιας – Περιγραφη του Μαθηματος

Όπως διαφάνηκε στην εισαγωγική αναφορά μας, ο κύριος στόχος μιας "άλλης" διδασκαλίας για την αντιμετώπιση εξισώσεων και ανισώσεων με απόλυτες τιμές, είναι η αντικατάσταση, σε ένα πρώτο στάδιο, των τυπικών αλγοριθμικών διαδικασιών με μια άλλη μέθοδο, όπου θα αποδίδεται στην έννοια της απόλυτης τιμής η γεωμετρική της διάσταση, που δεν είναι άλλη από αυτήν του μήκους ενός ευθυγράμμου τμήματος. Με τον τρόπο αυτόν πιστεύουμε ότι ο μαθητής μπορεί να αισθητοποιήσει σε βάθος, και όχι επιφανειακά, τη λειτουργία της έννοιας της απόλυτης τιμής ως απόστασης.

Η παρουσίαση της έννοιας γίνεται σε ένα γεωμετρικό περιβάλλον, "πρακτικό – ανακαλυπτικό"[1], με πολύ λίγα προαπαιτούμενα. Αυτά είναι:

α) Η γνώση του άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Η ιδιότητα που έχουν τα σημεία ενός κύκλου να ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου.

γ) Ο ορισμός του συμβόλου $|\alpha - \beta|$ ή $|\beta - \alpha|$ να εκφράζει την απόσταση των αριθμών α και β του άξονα.

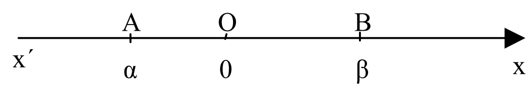
Για την πειραματική εφαρμογή της πρότασής μας, σχεδιάσαμε μια διδασκαλία, την οποία στη συνέχεια πραγματοποιήσαμε, το σχολικό έτος 1999-2000, σε μαθητές δύο τμημάτων της Α΄ Λυκείου, σε δύο διαφορε-

[1] Επειδή ο όρος γεωμετρικό περιβάλλον «πρακτικό-ανακαλυπτικό» είναι αδόκιμος στη Διδακτική των Μαθηματικών, επιθυμούμε με τον όρο αυτό να προσδιορίσουμε μια διδασκαλία όπου οι (καινούριες) προτάσεις και έννοιες «γεννιούνται» και εξελίσσονται με φυσιολογικό τρόπο, χωρίς φορμαλιστικές παρεμβάσεις από τον διδάσκοντα. Στην πορεία ανακάλυψης της καινούριας (για τους μαθητές) έννοιας κυριαρχούν οι εικασίες και οι δοκιμές, που στηρίζονται σε γεωμετρικές αναπαραστάσεις ορισμών, εννοιών και προτάσεων που ήδη γνωρίζουν οι μαθητές. Σε μια τέτοια διδασκαλία ο ρόλος του διδάσκοντα είναι αυτός του καλού συντονιστή που υποβάλλει, στην κατάλληλη στιγμή, ερωτήσεις οι οποίες έχουν ως στόχο να προωθούν τις διαδικασίες της έρευνας στην τάξη.

τικά Λύκεια της πόλης των Τρικάλων. Σε καθένα από τα τμήματα αυτά χρησιμοποιήθηκαν δύο διδακτικές ώρες.

Στη συνέχεια της εργασίας μας θα αναφερθούμε με συντομία, στο μέτρο του δυνατού βεβαίως, στην πορεία που ακολουθήσαμε κατά την παρουσίαση αυτού του δίωρου μαθήματος.

Ξεκινήσαμε τη διδασκαλία μας παρουσιάζοντας στα παιδιά τον άξονα των πραγματικών αριθμών, πάνω στον οποίο βάλαμε τα σημεία Α, Ο και Β. Στα σημεία αυτά αντιστοιχίζονται οι πραγματικοί αριθμοί α, 0 (μηδέν) και β.

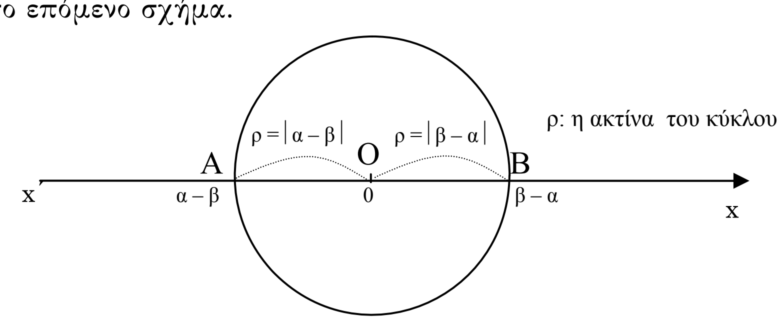


Τονίσαμε ότι όταν θα λέμε απόσταση των αριθμών α και β, θα εννοούμε το μήκος του τμήματος ΑΒ. Το μήκος αυτό, που είναι ένας θετικός αριθμός, μπορούμε να το δηλώσουμε με το σύμβολο $|\alpha-\beta|$.

Έτσι στην ερώτηση: "πως θα πρέπει να συμβολίζουμε το μήκος του τμήματος ΑΟ;", προέκυψε αμέσως η απάντηση: $|\alpha-0|$ δηλαδή $|\alpha|$.

Τι εκφράζει το σύμβολο $|\beta|$; Απάντηση: Το μήκος του τμήματος ΒΟ, αφού $|\beta| = |\beta-0|$.

Στο πλαίσιο της εισαγωγής μας στο μάθημα, τους παρουσιάσαμε και το επόμενο σχήμα.



Με τη βοήθεια αυτού του σχήματος, αναλύσαμε διεξοδικά τη σχέση των συμβόλων $|\alpha-\beta|$, $|\beta-\alpha|$ μεταξύ τους και με τους αριθμούς: $\alpha-\beta$ και $\beta-\alpha$. Αξίζει να σημειώσουμε εδώ τη συμβολή του σχήματος στην αισθητοποίηση της ισότητας $|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$.

Ο πρώτος στόχος που θέσαμε, πριν προχωρήσουμε στη συζήτηση – ανάλυση των παραδειγμάτων μας, ήταν να μπορούν οι μαθητές να διατυπώνουν λεκτικά τι ακριβώς ζητάμε, στην περίπτωση που τους δοθεί η τυπική μορφή μιας εξίσωσης ή ανίσωσης. Για το λόγο αυτό τους δώσαμε τις εξής τυπικές μορφές:

$|x-2|=3$, $|x+1|<4$, $|2x-3|\geq 5$,

$|x-3|+|x+4|=10$, $|5x-6|<-7$

και τους ζητήσαμε να "διαβάσουν" αυτές τις σχέσεις χρησιμοποιώντας τον όρο απόσταση αντί του όρου απόλυτη τιμή.

Τις σωστές απαντήσεις των παιδιών, που προέκυψαν μετά από έναν σύντομο σχετικά διάλογο, τις παρουσιάζουμε στον πίνακα που ακολουθεί.

Τυπική μορφή Εξίσωσης, ανίσωσης	Το ζητούμενο διατυπωμένο λεκτικά
$\|x-2\|=3$	Ζητάμε τις τιμές του x, ώστε η απόστασή τους από το 2 να είναι ίση με 3 μονάδες μήκους.
$\|x+1\|<4$	Αφού $\|x+1\| = \|x-(-1)\|$, ζητάμε τις τιμές του x, ώστε η απόστασή τους από τον αριθμό –1 να είναι μικρότερη από 4 μονάδες μήκους.
$\|2x-3\|\geq 5$	Ζητάμε τις τιμές του x, ώστε η απόστασή του 2x από τον αριθμό 3 να είναι μεγαλύτερη ή ίση από 5 μονάδες μήκους.
$\|x-3\|+\|x+4\|=10$	Ζητάμε τις τιμές του x, ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του x από τους αριθμούς 3 και –4 να είναι ίση με 10 μονάδες μήκους.
$\|5x-6\|<-7$	Ζητάμε τις τιμές του x, ώστε η απόσταση του 5x από το 6 να είναι μικρότερη από –7 μονάδες μήκους. Τέτοιες τιμές του x δεν υπάρχουν.

Κρίνουμε σκόπιμο να αναφέρουμε εδώ δύο σημεία, στα οποία τα παιδιά προβληματίστηκαν:

α) στην περίπτωση της ανίσωσης $|x + 1| < 4$, η οποία έπρεπε να μετασχηματιστεί στην $|x - (-1)| < 4$ και,

β) στην τελευταία ανίσωση: $|5x - 6| < -7$. Στην περίπτωση αυτή, εκτός από τη λεκτική διατύπωση, ζητήσαμε να μας πούνε αν υπάρχουν τιμές του x που την επαληθεύουν. Στο σημείο τούτο χρειάστηκε να υπενθυμίσουμε σε κάποια παιδιά ότι το σύμβολο $|5x - 6|$ εκφράζει μήκος ευθυγράμμου τμήματος. Αυτή η παρέμβασή μας διευκόλυνε την κατάσταση.[2]

Στη συνέχεια της πειραματικής μας διδασκαλίας προχωρήσαμε στη συζήτηση κάποιων παραδειγμάτων, τα οποία παρουσιάζουμε λυμένα για τις ανάγκες της εργασίας μας. Στην παρουσίασή τους αφήνουμε κάποιες διατυπώσεις που προέκυψαν κατά τη συζήτηση στην τάξη.

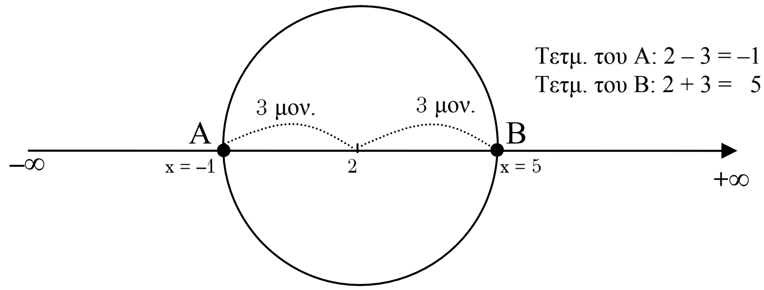
α) Να λυθεί η εξίσωση $|x - 2| = 3$

Απάντηση:

Το $|x - 2|$, δηλαδή το πρώτο μέλος της εξίσωσης, εκφράζει την απόσταση του x από τον αριθμό 2. Έτσι η έκφραση: "Λύστε την εξίσωση

[2] Σχετική άποψη του Δρ. Μαθηματικών του Παν. Αθηνών Στράτου Μάκρα, που διατύπωσε σε διάλεξη που διοργανώθηκε από το παράρτημα Τρικάλων της Ε.Μ.Ε. στις 29/4/1997, με θέμα "Η Γεωμετρική εποπτεία στη διδασκαλία της Ανάλυσης": «*Πολλές φορές μιλώντας για την "ανακάλυψη" διαφόρων πραγμάτων από τους μαθητές μας, εννοούμε συνήθως τη διατύπωση μιας απάντησης που εμείς θα περιμέναμε. Κάτι τέτοιο όμως δεν συμβαίνει πάντα· και αυτό το ξέρουμε αρκετά καλά. Αν οι μαθητές μας αφεθούν μόνοι τους, χωρίς τις δικές μας διδακτικές παρεμβάσεις, δεν πρόκειται να ανακαλύψουν και πολλά πράγματα. Η δημιουργία από τη μεριά των καθηγητών, με τις κατάλληλες κάθε φορά παρεμβάσεις τους, ενός κλίματος που να κεντρίζει την περιέργεια των παιδιών και να τα ωθεί σε διαδικασίες ανακαλυπτικές, είναι βασική προϋπόθεση μιας αποτελεσματικής διδασκαλίας*».

$|x-2| = 3$" διαβάζεται ισοδύναμα: "Βρείτε τις τιμές του x, ώστε η απόστασή του από τον αριθμό 2 να είναι 3 μον. μήκους".

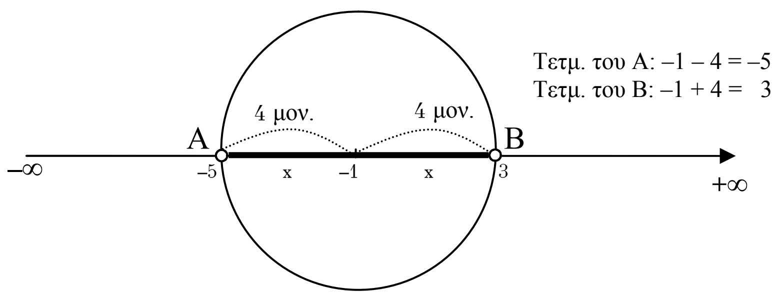


Γράφουμε τον κύκλο[3] με κέντρο το σημείο Κ, στο οποίο αντιστοιχίζεται το 2, και ακτίνα ίση με 3 μον. μήκους.
Ο κύκλος αυτός τέμνει τον άξονα των πραγματικών αριθμών στα σημεία Α και Β. Οι αριθμοί –1 και 5, που αντιστοιχίζονται στα σημεία αυτά, είναι οι λύσεις της εξίσωσης $|x-2| = 3$.

β) Να λυθεί η ανίσωση $|x+1| < 4$

Απάντηση:

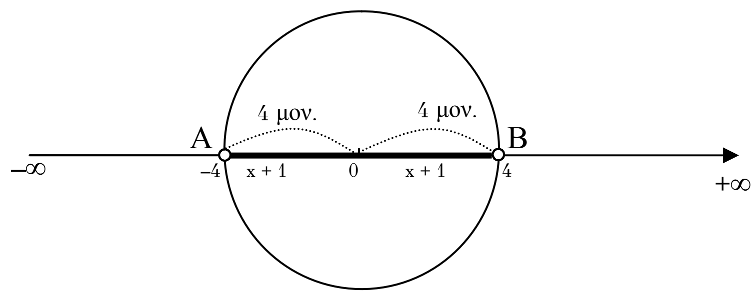
Το $|x+1|$ γράφεται $|x-(-1)|$. Έτσι εδώ ζητάμε τις τιμές του x, που η απόστασή τους από το –1 να είναι μικρότερη από 4 μον. μήκους.



[3] Ο κύκλος σχεδιάστηκε, στα θέματα που αναλύσαμε, για τη γεωμετρική αισθητοποίηση της εύρεσης των δύο αριθμών του άξονα που ισαπέχουν από ένα γνωστό αριθμό. Και αυτό γιατί, έχουμε τη γνώμη, ότι όλοι οι μαθητές γνωρίζουν, έστω και εμπειρικά, την ιδιότητα των σημείων ενός κύκλου να ισαπέχουν από το κέντρο του.

Γράφουμε τον κύκλο με κέντρο το σημείο Κ, στο οποίο αντιστοιχίζεται το -1, και ακτίνα ίση με 4 μον. μήκους.
Ο κύκλος αυτός τέμνει τον άξονα στα σημεία Α και Β, στα οποία αντιστοιχίζονται οι αριθμοί -5 και 3.
Είναι φανερό ότι οι τιμές του x που ζητάμε είναι οι αριθμοί του άξονα, που αντιστοιχίζονται σε σημεία εσωτερικά του κύκλου. Οπότε οι τιμές του x που επαληθεύουν την ανίσωση είναι εκείνες για τις οποίες:
$-5 < x < 3$.

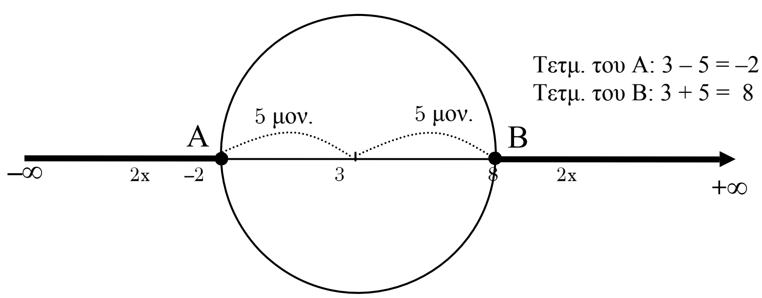
Μετά από την παραπάνω λύση, δώσαμε και μία άλλη ισοδύναμη λύση.
Το $|x + 1|$ γίνεται $|(x + 1) - 0|$.
Έτσι η ανίσωση $|x + 1| < 4$ γίνεται $|(x + 1) - 0| < 4$.
Στο σχήμα που ακολουθεί παρουσιάζεται εποπτικά η δεύτερη λύση:



Θέλουμε τα x για τα οποία $-4 < x + 1 < 4$, οπότε $-5 < x < 3$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $|2x - 3| \geq 5$

Απάντηση:



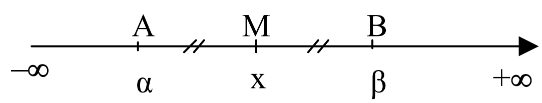
Είναι φανερό ότι ζητάμε τις τιμές του x, για τις οποίες οι αριθμοί 2x αντιστοιχίζονται σε σημεία του άξονα που βρίσκονται στο εξωτερικό του κύκλου, μαζί με τους αριθμούς 2x, που αντιστοιχίζονται στα A και B. Δηλαδή θέλουμε: $2x \leq -2$ ή $2x \geq 8$ ή ισοδύναμα: $x \leq -1$ ή $x \geq 4$.

δ) i. Αν A και B είναι δύο διακεκριμένα σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών με τετμημένες α, β αντίστοιχα και M είναι το μέσο του τμήματος AB, τότε για την τετμημένη x του M να αποδειχτεί ότι: $x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$.

ii. Να λυθεί η εξίσωση: $|x + 4| = |x - 2|$

iii. Να λυθεί η ανίσωση: $|x + 4| < |x - 2|$

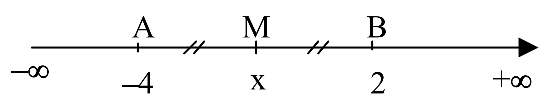
Απάντηση:



i. Επειδή το M είναι μέσο του τμήματος AB, θα ισχύει MA = MB και ισοδύναμα:

$x - \alpha = \beta - x$ ή $2x = \alpha + \beta$ ή $x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$.

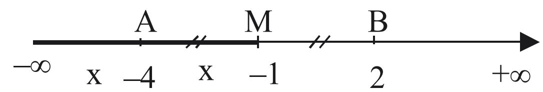
ii. Η εξίσωση γίνεται: $|x - (-4)| = |x - 2|$.



Θέλουμε το x να ισαπέχει από τους αριθμούς –4 και 2. Αυτό σημαίνει ότι το x είναι η τετμημένη του μέσου M του τμήματος AB, οπότε, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα (i), θα είναι:

$x = \dfrac{-4 + 2}{2}$, δηλαδή $x = -1$.

iii. Η ανίσωση γίνεται $|x - (-4)| < |x - 2|$.



Γεωμετρικά θέλουμε τα σημεία του άξονα που βρίσκονται πιο κοντά στο A από ότι στο B. Είναι φανερό λοιπόν ότι εδώ ζητάμε τις τετμημένες x των σημείων της ημιευθείας MA, από την οποία εξαιρείται η αρχή της M (M: μέσο του τμήματος AB). Επομένως η ανίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό $x < -1$.

ε) Να λυθεί η εξίσωση $|x - 3| + |x + 4| = 10$

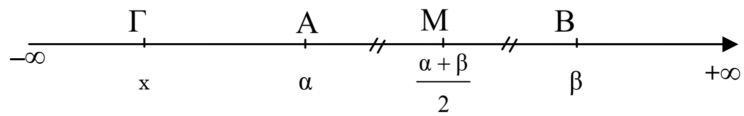
Απάντηση:

Εδώ τα πράγματα περιπλέκονται. Είναι απαραίτητο να φτιάξουμε πρώτα κάποια γενικότερη υποδομή. Να δημιουργήσουμε ένα κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο, ανάλογο προς την πρότασή μας, που απαιτεί στη διαδικασία επίλυσης να κυριαρχεί η γεωμετρική εποπτεία.
Το γενικό πρόβλημα που έχουμε να επιλύσουμε είναι προφανώς το εξής:
Αν δοθούν δύο πραγματικοί α και β, να λυθεί η εξίσωση :

$$|x - \alpha| + |x - \beta| = \lambda, \ \lambda > 0.$$

Την απόδειξη του θέματος αυτού παρουσιάσαμε αναλυτικά με αρκετή "ενδιάμεση" συζήτηση. Για προφανείς όμως λόγους, την παρουσιάζουμε εδώ με κάποια συντομία.
Σύμφωνα με τον ορισμό της απόλυτης τιμής, ως μήκους ενός ευθυγράμμου τμήματος, η εξίσωση $|x - \alpha| + |x - \beta| = \lambda$ θα μπορούσε ισοδύναμα να πάρει τη μορφή ΓA + ΓB = λ, όπου A, B είναι δύο σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών με τετμημένες α, β αντίστοιχα και Γ ένα άλλο σημείο του άξονα με (άγνωστη) τετμημένη x.

Παίρνουμε επίσης το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ.



Η ισότητα $\quad \Gamma\mathrm{A} + \Gamma\mathrm{B} = \lambda$ μετασχηματίζεται ισοδύναμα:

$$\Gamma\mathrm{A} + (\Gamma\mathrm{M} + \mathrm{MB}) = \lambda$$

$$\Gamma\mathrm{A} + (\Gamma\mathrm{M} + \mathrm{AM}) = \lambda$$

$$(\Gamma\mathrm{A} + \mathrm{AM}) + \Gamma\mathrm{M} = \lambda$$

$$\Gamma\mathrm{M} + \Gamma\mathrm{M} = \lambda$$

$$2\Gamma\mathrm{M} = \lambda$$

$$\Gamma\mathrm{M} = \frac{\lambda}{2}$$

$$\left| x - \frac{\alpha+\beta}{2} \right| = \frac{\lambda}{2}$$

Αποδείξαμε τελικά ότι:

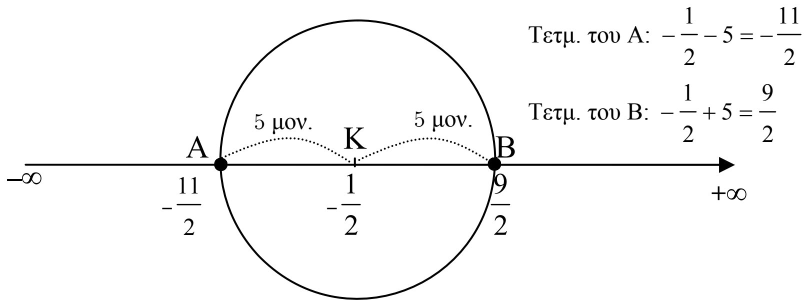
$$|x-\alpha| + |x-\beta| = \lambda \quad \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \quad \left| x - \frac{\alpha+\beta}{2} \right| = \frac{\lambda}{2}\ , \ \lambda > 0$$

Η ισοδυναμία[4] στην οποία καταλήξαμε, πιστεύουμε ότι αποτελεί το κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο, που μας ήταν απαραίτητο για να λύσουμε την εξίσωση: $|x-3| + |x+4| = 10$

Τα πράγματα τώρα είναι αρκετά απλά. Είναι πλέον αρκετό να λύσουμε την ισοδύναμη εξίσωση:

$$\left| x - \frac{3+(-4)}{2} \right| = \frac{10}{2}, \ \text{δηλαδή την} \ \left| x - \left(-\frac{1}{2} \right) \right| = 5\,.$$

[4] Απαραίτητη προϋπόθεση για να ισχύει η ισοδυναμία είναι η συνθήκη:
$|\Gamma\mathrm{A} - \Gamma\mathrm{B}| < \mathrm{AB} < \Gamma\mathrm{A} + \Gamma\mathrm{B}$, λόγω της τριγωνικής ανισότητας για τα σημεία Α, Β, Γ.
Δηλαδή πρέπει να ισχύει: $|\Gamma\mathrm{A} - \Gamma\mathrm{B}| < |\alpha - \beta| < \lambda$.



Άσκηση

Πάνω στον άξονα x′x σημειώστε τα σημεία Α(2, 0) και Β(4, 0). Διερευνείστε αν υπάρχουν θέσεις (και πόσες;) του άξονα x′x, στις οποίες θα μπορούσατε να τοποθετήσετε το σημείο Μ(x, 0), ώστε:

(i) ΜΑ + ΜΒ = 2 (ii) ΜΑ + ΜΒ = 1

Διατυπώστε έπειτα τις "γεωμετρικές" ισότητες (i) και (ii), χρησιμοποιώντας το σύμβολο της απόλυτης τιμής. Ποιες είναι οι λύσεις αυτών των εξισώσεων;

Συμπερασματα Αξιολογησης Αποτελεσματων Εμπειρικης Ερευνας

Μετά την πειραματική διδασκαλία μας στα δύο τμήματα[5] της Α′ Λυκείου και έπειτα από συζητήσεις με συναδέλφους μαθηματικούς, που διδάσκουν στο Λύκειο, έχουμε κάθε λόγο να πιστεύουμε στη αποτελεσματικότητα της μεθόδου "άξονας-κύκλος", που παρουσιάσαμε. Ο ι-

[5] Τα δύο τμήματα χρησιμοποιήθηκαν ως τμήματα ελέγχου και πειραματισμού συγχρόνως – μια ασυνήθης πρακτική. Επιλέξαμε τη συγκεκριμένη διαδικασία γιατί θέλαμε οι ίδιοι μαθητές, αφού διδαχτούν τη μέθοδο του άξονα-κύκλου που προτείνουμε με αυτή μας την εργασία· και εκείνη των συνήθων αλγεβρικών διαδικασιών, να επιλέξουν τελικά οι ίδιοι, με δικά τους κριτήρια, τη μέθοδο που επιθυμούν να ακολουθούν για την επίλυση σχετικών θεμάτων.

σχυρισμός μας αυτός ενισχύεται και από μια εμπειρική έρευνα που κάναμε στους μαθητές που παρακολούθησαν τη διδασκαλία μας. Συγκεκριμένα, ένα μήνα μετά την πειραματική διδασκαλία μας, σχεδιάσαμε και ακολούθως πραγματοποιήσαμε ένα test με θέματα αντίστοιχα αυτών που τους είχαμε παρουσιάσει. Ζητήσαμε από τους μαθητές, αν ακολουθήσουν τη γεωμετρική μέθοδο, να χρησιμοποιήσουν τον άξονα των πραγματικών αριθμών και τον κύκλο, χωρίς κατ' ανάγκη να κάνουν και τη λεκτική περιγραφή της σχετικής κατασκευής τους. Τους εξηγήσαμε επίσης ότι μπορούν, αν θέλουν, να απαντήσουν στα θέματα του test και με το συνήθη τρόπο που υποδεικνύεται στο σχολικό τους βιβλίο. Και αυτό γιατί στα παιδιά παρουσιάστηκε και η μεθοδολογία του βιβλίου τους.

Ζητήσαμε από τους μαθητές να απαντήσουν στις εξής ερωτήσεις:

Ερώτηση *1η*

Να γράψετε τις εξισώσεις ή ανισώσεις που αντιστοιχούν στις παρακάτω διατυπώσεις:

α) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού x, ώστε η απόσταση του 4x από τον αριθμό 3 να είναι μεγαλύτερη από 5 μονάδες μήκους.

β) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού x, ώστε η απόστασή του από τον αριθμό 4 να είναι ίση με 6 μονάδες μήκους.

γ) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού x, ώστε η απόστασή του από τον αριθμό 2 να είναι μικρότερη ή ίση από 6 μονάδες μήκους.

δ) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού x, ώστε η πρόσθεση των αποστάσεων του x από τους αριθμούς 4 και 2 να είναι ίση με 12 μονάδες μήκους.

Ερώτηση *2η*

α) Να λυθεί η ανίσωση $|-4x+3| > 5$.

Ποια είναι η σχέση των λύσεων αυτής της ανίσωσης με τις λύσεις της *ανίσωσης που γράψατε στο (α) της πρώτης ερώτησης; Μήπως μπορείτε να δικαιολογήσετε την απάντησή σας;*

β) Να λύσετε τις εξισώσεις και ανισώσεις που γράψατε στα (β) και (γ) της πρώτης ερώτησης.

γ) Πάνω στον άξονα x΄x κινείται ένα σημείο Μ, που έχει τετμημένη x, έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη: "η απόστασή του από τον αριθμό –1000 να είναι μικρότερη από την απόστασή του από τον αριθμό 5008". Να προσδιορίσετε τις θέσεις του Μ που ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη.

δ) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού x ισχύει:

$$|x-1999|<-2000;$$

Μια πρώτη επεξεργασία των αποτελεσμάτων του test, που πραγματοποιήθηκε σε σύνολο 55 μαθητών, φαίνεται στους επόμενους πίνακες:

Ερώτηση πρώτη	Σωστές απαντήσεις	%
α	48	87,3
β	48	87,3
γ	45	81,8
δ	41	74,5

Ερώτηση δεύτερη	Σωστές απαντήσεις	%	Μαθητές που χρησιμοποίησαν τη μέθοδο "άξονα-κύκλου"
α	41	74,5	31
β	42	76,4	32
γ	39	71,0	34
δ	44	80,0	

Εν προκειμένω, η μελέτη των αποτελεσμάτων του test:

α) Μας έδωσε πληροφορίες που έχουν σχέση με το βαθμό αποτελεσματικότητας της διδασκαλίας, που νωρίτερα είχαμε πραγματοποιήσει.

β) Μας επέτρεψε να αξιολογήσουμε, ως θετική καταρχήν, τη μέθοδο "άξονας-κύκλος" και να εντοπίσουμε τα σημεία εκείνα στα οποία απαιτείται κάποια διαφοροποίηση, όσον αφορά την παρουσίασή της.

Σε ότι έχει σχέση τώρα με τα είδη των λαθών που αντιμετωπίσαμε:

α) Ορισμένοι μαθητές που ακολούθησαν τη μέθοδο "άξονας-κύκλος" έκαναν λάθη αλγεβρικού λογισμού κατά τον προσδιορισμό των τετμημένων των σημείων τομής του κύκλου με τον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Τα λάθη των μαθητών, που ακολούθησαν την πορεία των συνήθων αλγεβρικών διαδικασιών (χωρίς σχήματα), εντοπίστηκαν κυρίως στην εσφαλμένη τοποθέτηση του ανισωτικού συμβόλου ($<$ ή $>$) στην πορεία επίλυσης των ανισώσεων του test.

Επειδή ο κύριος στόχος αυτής της εργασίας είναι η παρουσίαση της διδακτικής μας πρότασης – κάτι που αναφέρουμε και στον τίτλο, δεν προχωρούμε σε μια διεξοδική και πιο αναλυτική επεξεργασία των στοιχείων που προέκυψαν από την εμπειρική έρευνα που πραγματοποιήσαμε.

Στο σημείο τούτο πρέπει να επισημάνουμε βεβαίως ότι τα όποια συμπεράσματα προκύπτουν περί της αποτελεσματικότητας της μεθόδου μας, αναφέρονται σε ένα δείγμα μικρού μεγέθους ($ν = 55$ μαθητές Α′ Λυκείου). Είναι απαραίτητη για το λόγο αυτό και μια άλλη έρευνα με αντιπροσωπευτικό δείγμα μεγάλου μεγέθους. Μια έρευνα μέσα σε σχολικές τάξεις, όπου η ομοιογένεια του γνωστικού επιπέδου των μαθητών δεν είναι δεδομένη.

Έχουμε την αίσθηση ότι η διδακτική πρόταση που αναλύσαμε ανοίγει έναν άλλο δρόμο για μια πιο αποτελεσματική παρουσίαση της έννοιας της απόλυτης τιμής στο Λύκειο. Η επέκταση της μεθόδου της «γεωμετρικοποίησης» και σε άλλες μορφές εξισώσεων και ανισώσεων με απόλυτες τιμές αφήνεται στην ευρηματικότητα των συναδέλφων. Η καταρχήν ιδέα αναλύθηκε· ο δρόμος της περαιτέρω αναζήτησης και διερεύνησης, εκ των πραγμάτων, είναι πλέον ανοιχτός.

Κρίνουμε, τέλος, σκόπιμο να τονίσουμε εδώ ότι η «γεωμετρικοποίηση» των απόλυτων τιμών δεν πρέπει να αποτελεί αυτοσκοπό – γιατί τότε η μέθοδος που παρουσιάσαμε κινδυνεύει να εγκλωβιστεί στον εαυτό της. Η «αρμονική συνεργασία» της με τις αλγεβρικές διαδικασίες, που εκ των πραγμάτων έπονται, είναι αυτό που τελικά επιδιώκουμε.

Η Απολυτη Τιμη ως μια Συναρτηση Μετρου

Αν σε κάθε πραγματικό x αντιστοιχίσουμε την απόσταση του x από τον αριθμό 0 του άξονα των πραγματικών αριθμών, τότε κατασκευάζουμε τη συνάρτηση μέτρου $f\colon \mathrm{x} \to |\mathrm{x}|$.

Συμβολικά μπορούμε να γράφουμε και $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, με $f(\mathrm{x}) = |\mathrm{x}|$.

Σύμφωνα με όσα προηγήθηκαν στην εργασία μας, σχετικά με την έννοια της απόλυτης τιμής –θεωρούμενης ως απόστασης δύο σημείων του άξονα των πραγματικών αριθμών–, προκύπτουν οι άμεσες συνέπειες:

- $|\mathrm{x}| = \begin{cases} \mathrm{x}, & \text{αν } \mathrm{x} > 0 \\ -\mathrm{x}, & \text{αν } \mathrm{x} < 0 \\ 0, & \text{αν } \mathrm{x} = 0 \end{cases}$
- $|\mathrm{x}| \geq 0$
- $|\mathrm{x}^2| = \mathrm{x}^2$
- $|\mathrm{x}| \geq \mathrm{x}$ και $|\mathrm{x}| \geq -\mathrm{x}$
- $|\mathrm{x}| = |-\mathrm{x}|$
- $|\mathrm{x}| < \theta \Leftrightarrow -\theta < \mathrm{x} < \theta$, για κάθε $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ και $\theta > 0$
- $|\mathrm{x}| > \theta \Leftrightarrow \mathrm{x} < -\theta$ ή $\mathrm{x} > \theta$, για κάθε $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ και $\theta > 0$

Ιδιότητες των απόλυτων τιμών

Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει:

- $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
- $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$, $\beta \neq 0$
- $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Στην τελευταία ιδιότητα ισχύει μόνο το (<) όταν α, β ετερόσημοι, ενώ ισχύει μόνο το (=) όταν α, β ομόσημοι ή ένας από τους α, β είναι 0.

Εμποδια στην Κατανοηση της Εννοιας της Απολυτης Τιμης

Τα εμπόδια στα οποία θα αναφερθούμε εντοπίζονται κυρίως στη διττή αναφορική ερμηνεία της έννοιας της απόλυτης τιμής: α) ως απόστασης και β) ως μιας συνάρτησης μέτρου, που έχει ένα συγκεκριμένο αναλυτικό τύπο. Ας γίνουμε πιο συγκεκριμένοι:

Στο Γυμνάσιο η απόλυτη τιμή έχει έναν υπολογιστικό χαρακτήρα. Ζητάμε για παράδειγμα από τα παιδιά να υπολογίσουν την τιμή της παράστασης $|-2| + |8| - |-7|$. Στα πλαίσια τέτοιων υπολογισμών εύκολα δημιουργείται ο "παρακανόνας": *απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι ο αριθμός χωρίς το πρόσημό του*. Βεβαίως, ο παρακανόνας αυτός δεν δημιουργεί προβλήματα στον υπολογισμό της απόλυτης τιμής τέτοιων παραστάσεων. Μάλιστα δε, αποτελεί ένα ιδιαίτερα βολικό εργαλείο στους μαθητές εκείνους, που τους χαρακτηρίζουμε μαθησιακά αδύνατους στα Μαθηματικά. Ο παρακανόνας όμως αυτός δημιουργεί τεράστια προβλήματα όταν για παράδειγμα από τον υπολογισμό του $|-5|$ θελήσουμε να μεταπηδήσουμε στον υπολογισμό του $|x|$, όπου x ένας πραγματικός αριθμός.

Ας θυμηθούμε την αντίδραση των παιδιών της Α′ Λυκείου, όταν τους λέμε ότι: $|x| = -x$, όταν x αρνητικός. Η μετάβαση, από την απόλυτη τιμή ενός συγκεκριμένου αριθμού στην απόλυτη τιμή του x, αποτελεί ένα πολύ μεγάλο διδακτικό εμπόδιο. Η γεωμετρική εποπτεία και η μέθοδος του "άξονα-κύκλου", που προτείναμε με την εργασία μας, είναι ο καλύτερος τρόπος για να ξεπεράσει κανείς με ευκολία το συγκεκριμένο διδακτικό εμπόδιο.

Κρίνουμε σκόπιμο να προσθέσουμε εδώ ότι, ως αποτέλεσμα του συγκεκριμένου παρακανόνα, αρκετοί μαθητές γράφουν $|-x| = x$, χωρίς να ενδιαφέρονται για το πρόσημο του x.

Τα πράγματα αρχίζουν να μπαίνουν στη θέση τους και ο παρακανόνας αρχίζει να τίθεται υπό αμφισβήτηση, όταν ζητήσεις από τους μαθητές να βρούν έναν πραγματικό αριθμό χωρίς πρόσημο. Απαντούν, για παράδειγμα, 5, όμως πρόκειται για τον +5. Η κατάληξη: δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί χωρίς πρόσημο. Ακόμα και όταν γράφουμε 5, υπονοούμε τον +5.

Ας έλθουμε τώρα σε μια άλλη κατηγορία λαθών, που οφείλονται στη φορμαλιστική παρουσίαση των ιδιοτήτων της απόλυτης τιμής –

θεωρούμενης ως συνάρτησης και μάλιστα απαλλαγμένης από τη γεωμετρική εποπτεία.

Η πλειονότητα των μαθητών επιχειρεί να βρει τις λύσεις εξισώσεων και ανισώσεων σαν τις:

$$|x+5|=-2, \quad ||x-1|+2|=-3, \quad |x-8|<-2, \quad |x+9|>-5,$$

χρησιμοποιώντας τους γνωστούς αλγόριθμους:

$$\begin{aligned} |x| = \theta &\Leftrightarrow x=\theta \ \text{ή} \ x=-\theta \\ |x| < \theta &\Leftrightarrow -\theta < x < \theta, \\ |x| > \theta &\Leftrightarrow x<-\theta \ \text{ή} \ x>\theta \end{aligned}$$

Εκείνο βεβαίως που αγνοούν, ή δεν παίρνουν υπόψη τους, είναι ότι οι αλγόριθμοι αυτοί ισχύουν μόνον όταν ο αριθμός θ είναι θετικός.

Τα συγκεκριμένα λάθη θα τα απέφευγαν οι μαθητές, αν είχαν εξαρχής αισθητοποιήσει την απόλυτη τιμή ως απόσταση δύο σημείων του άξονα· δηλαδή την απόλυτη τιμή ως μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος, που δεν μπορεί ποτέ να εκφράζεται με έναν αρνητικό αριθμό. Όλα τα λάθη, στα οποία αναφερθήκαμε, υποδηλώνουν την ύπαρξη ισχυρών αντιλήψεων για την έννοια της απόλυτης τιμής, που βεβαίως δεν συμπίπτουν με την αντίστοιχη "λόγια γνώση".

Ένα άλλο μεγάλο πρόβλημα που δημιουργείται, οφείλεται στην αντίληψη, που καλλιεργείται από ορισμένους καθηγητές των μαθηματικών, ότι η απόλυτη τιμή είναι απλά "*ένα σύμβολο που πρέπει να το διώχνουμε όπου το συναντάμε*". Η άποψη αυτή αποστερεί από την απόλυτη τιμή κάθε ενδογενές της μαθηματικό περιεχόμενο. Χάνεται με τον τρόπο αυτό κάθε αναφορική σημασία της απόλυτης τιμής, αφού δεν αντιμετωπίζεται με καθαρό τρόπο, ούτε ως συνάρτηση, πολύ περισσότερο δε, ούτε ως απόσταση. Αντιμετωπίζεται ως ένα ουδέτερο καί ξένο σώμα που πρέπει το γρηγορότερο να "φύγει" από τις παραστάσεις στις οποίες συμμετέχει.

Για να αποφύγουμε κάθε παρανόηση: Βεβαίως, αν επιθυμούμε να κάνουμε τη μελέτη μιας συνάρτησης με απόλυτες τιμές, πρέπει ο τύπος της να γραφτεί με τη μορφή μιας νέας αναλυτικής "κλαδικής" συνάρτησης. Να εξηγήσουμε όμως πρώτα στους μαθητές την αναγκαιότητα της νέας ισοδύναμης γραφής. Να τονίζουμε και να διατηρούμε με τις εξηγήσεις μας αυτές το αναφορικό νόημα της έννοιας της απόλυτης τιμής, η οποία στην περίπτωσή μας παρουσιάζεται με τη μορφή συνάρτησης μέτρου.

Αυτή η εντελώς τεχνική και καθαρά φορμαλιστική αντίληψη για τις απόλυτες τιμές δεν εμφανίζεται βεβαίως "ουρανοκατέβατα" από τους καθηγητές των μαθηματικών. Τα αναλυτικά προγράμματα και η υλοποίησή τους μέσα από τα αντίστοιχα σχολικά βιβλία είναι αυτά που κάθε φορά προωθούν μια συγκεκριμένη φιλοσοφία για τα μαθηματικά. Η φιλοσοφία αυτή είναι φυσικό να διαχέεται σε όλους τους εμπλεκόμενους, καθηγητές και μαθητές, και να δημιουργεί με τη σειρά της ένα πρότυπο "στυλ" γραφής και παρουσίασης των μαθηματικών εννοιών για μια ορισμένη (και συνήθως όχι μικρή) χρονική περίοδο.

Για να τεκμηριώσουμε την αναφορά μας αυτή, θα αναφερθούμε σε κάποια συγκεκριμένα παραδείγματα:

Στις αρχές της δεκαετίας του '70 διδάσκεται στα σχολεία το βιβλίο: "ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ε΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ, τ. 1ος, Ηλία Β. Ντζιώρα, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα 1971". Στο βιβλίο αυτό αφιερώνεται ένα ολόκληρο κεφάλαιο με 31 σελίδες ειδικά για τις απόλυτες τιμές. Η όλη τοποθέτηση και η διαπραγμάτευση του θέματος αποτελεί μία μνημειώδη παρουσίαση της απόλυτης τιμής, όπου ο φορμαλισμός και η παντελής έλλειψη της γεωμετρικής εποπτείας βρίσκονται στο σημείο της τέλειας αποθέωσής τους. Η απόλυτη τιμή στην κυριολεξία αντιμετωπίζεται ως ένα σύμβολο, $|x|$, που ισούται με το x, όταν x θετικός, ενώ με –x, όταν x αρνητικός· πρέπει να "φεύγει" όπου το συναντάμε, κάνοντας διάκριση περιπτώσεων για το πρόσημο της παράστασης που εμπεριέχεται στο σύμβολο $|\ |$.

Το κεφάλαιο ξεκινά με τον τυπικό – φορμαλιστικό ορισμό του συμβόλου $|\ |$. Ακολουθούν οι ιδιότητες του συμβόλου με τις αποδείξεις τους, όπου κυριαρχεί η περιπτωσιολογία και στη συνέχεια ακολουθεί η διερεύνηση πολύπλοκων παραμετρικών εξισώσεων και ανισώσεων με την κατασκευή πινάκων διερεύνησης· στο τέλος η "επίλυση εντός του $\mathbb{R}$ συστημάτων ειδικών μορφών με απόλυτες τιμές".

Το βιβλίο αυτό δεν γράφτηκε "εν αιθρία". Ήταν αποτέλεσμα των κυρίαρχων φιλοσοφικών αντιλήψεων για τα μαθηματικά, που επικρατούσαν πολύ νωρίτερα από την εποχή εκείνη στην Ευρώπη. Και όπως ήταν φυσικό, οι απόψεις αυτές πέρασαν με κάποια χρονική υστέρηση και στην Ελλάδα. Οι αντιλήψεις της εποχής αυτής οδήγησαν στην αναγωγή της "αυστηρότητας" σε πεμπτουσία των μαθηματικών. Οι αντιεποπτικές απόψεις, που βρισκόταν στο επίκεντρο, οδήγησαν στην ουσιαστική "απαγόρευση" της χρήσης της γεωμετρικής εποπτείας ως μέσο για την κατανόηση των διαφόρων εννοιών και προτάσεων. Οι ρίζες αυτής της παιδαγωγικής παρέκκλισης έρχονται χρονικά από μακριά.

Ξεκινούν μάλλον από τον Karl Weiertrass (1815-1897), έναν από τους θεμελιωτές της Μαθηματικής Ανάλυσης, ως μιας αξιωματικής μαθηματικής θεωρίας. Στον ίδιο οφείλεται το σύμβολο $|\alpha|$ και η ονομασία του. Η "αντιγεωμετρική" στάση του, που ήταν δικαιολογημένη μέσα στο κλίμα της εποχής, ερμηνεύτηκε από ορισμένους "επίγονους" σαν *διδακτικό σύνθημα*, κάτι το οποίο είναι αδικαολόγητο.

Το μέγεθος της "παιδαγωγικής – διδακτικής στρέβλωσης", που προέκυψε ως αποτέλεσμα αυτού του διδακτικού συνθήματος, το βλέπει κανείς ξεκάθαρα στα σχολικά βιβλία που εκδόθηκαν στη χώρα μας ως τα τέλη της δεκαετίας του '70. Το 1979-80 εκδίδεται από τον Ο.Ε.Δ.Β. καινούριο βιβλίο για την Άλγεβρα της Α′ Λυκείου, με συγγραφείς τους: Ν. Βαρουχάκη, Λ. Αδαμόπουλο, Ν. Αλεξανδρή, Δ.Α. Παπακωνσταντίνου και Α. Παπαμικρούλη. Στο βιβλίο αυτό, που αποτελεί το σχολικό εγχειρίδιο μέχρι το τέλος της δεκαετίας του '80, βλέπει κανείς μία "γραφή" επηρεασμένη από τις τάσεις των λεγομένων "*Νέων (Μοντέρνων) Μαθηματικών*".

Σε ότι έχει σχέση τώρα με την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού, αφιερώνονται 4 σελίδες, με 2 παραγράφους και 6 προτεινόμενες για λύση ασκήσεις. Ο ορισμός που τίθεται στο ξεκίνημα της σχετικής ενότητας είναι, και πάλι, ο συνήθης: Αν x είναι ένας πραγματικός αριθμός, η απόλυτη τιμή του συμβολίζεται με $|x|$ και ορίζεται ως εξής:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

Ακολουθούν οι γνωστές ιδιότητες, –που αποκαλούνται θεωρήματα–, μαζί με τις αποδείξεις τους, που δίνονται σύντομα με τυπικές αλγεβρικές διαδικασίες. Ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα των αλγεβρικών διαδικασιών, με τις οποίες παρουσιάζονται εδώ οι αποδείξεις, είναι η οριοθέτηση του συμβόλου $|x|$ ως το μεγαλύτερο από τα στοιχεία του συνόλου $\{x, -x\}$.

Το στοιχείο που μπορεί να αξιολογηθεί ως μια θετική διδακτική μετατόπιση είναι, σε σχέση με προηγούμενα σχολικά εγχειρίδια, η πρωτοπαρουσίαση (σε σχολικό βιβλίο της χώρας μας) του θεωρήματος: Για τους πραγματικούς αριθμούς x και θ, με $\theta > 0$, ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta \quad \text{και} \quad |x| \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta \text{ ή } x \geq \theta$$

Βεβαίως, αν η απόλυτη τιμή είχε οριστεί ως απόσταση, τότε οι προηγούμενες ισοδυναμίες δεν θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως θεωρήματα, αλλά ως άμεσες συνέπειες του ορισμού της απόλυτης τιμής, ως απόστασης δύο σημείων της ευθείας των πραγματικών αριθμών.

Στη συνέχεια, οι εξισώσεις $|x| = \alpha$ και $|x| = |\alpha|$, $\alpha \in \mathbb{R}$, αντιμετωπίζονται με ύψωση των μελών τους στο τετράγωνο.

Σε γενικές γραμμές η θεωρία παρουσιάζεται με κωδικοποιημένη μορφή και σταματά η γνωστή, ως την εποχή εκείνη, εμμονή στη συστηματική μελέτη της "περιπτωσιολογίας". Τέλος, σε όλη την ενότητα δεν γίνεται η παραμικρή νύξη για τη σύνδεση της απόλυτης τιμής με την έννοια της απόστασης.

Μια δεκαετία μετά, το 1990, εκδίδεται από τον Ο.Ε.Δ.Β. άλλο βιβλίο για την Άλγεβρα της Α′ Λυκείου. Η νέα συγγραφική ομάδα αποτελείται από τους: Σ. Ανδρεαδάκη, Β. Κατσαργύρη, Σ. Παπασταυρίδη, Γ. Πολύζο και Α. Σβέρκο. Το βιβλίο αυτό διατηρείται ως σχολικό εγχειρίδιο μέχρι τις μέρες μας με διαρκείς επανεκδόσεις και μικρές βελτιώσεις κατά διαστήματα.

Η τοποθέτησή μας ως προς το τελευταίο αυτό βιβλίο παρουσιάστηκε στην εισαγωγή της εργασίας μας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ας ξεκινήσουμε με τη διατύπωση της πρώτης ερώτησης:

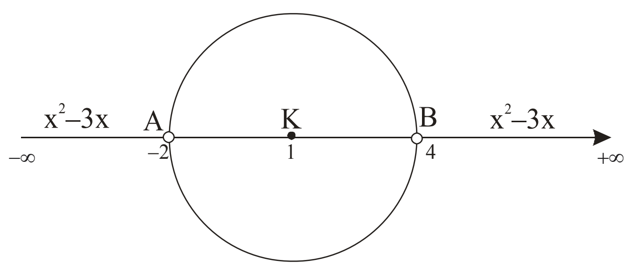
Η μέθοδος του άξονα – κύκλου πώς θα μπορούσε να αντιμετωπίσει μια ανίσωση με απόλυτες τιμές, όταν μέσα στο σύμβολο $| \ |$ υπήρχε παράσταση της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, αντί της μορφής $\alpha x + \beta$; *Να ληφθεί υπ' όψη ότι τη χρονική περίοδο, που οι μαθητές της Α΄ Λυκείου διδάσκονται την έννοια της απόλυτης τιμής, δεν γνωρίζουν να λύνουν ανισώσεις δευτέρου βαθμού.*

Ας πάρουμε ένα σχετικό παράδειγμα:

Να λυθεί η ανίσωση: $|x^2 - 3x - 1| > 3$

Απάντηση

Κατ' αρχήν η ανίσωση γράφεται: $|(x^2 - 3x) - 1| > 3$.
Είναι φανερό ότι ζητάμε τις τιμές του x, για τις οποίες οι αριθμοί $x^2 - 3x$ του άξονα απέχουν από τον αριθμό 1 απόσταση μεγαλύτερη από 3 μον. μήκους.



$x^2 - 3x < -2$

ή $x^2 - 3x + 2 < 0$

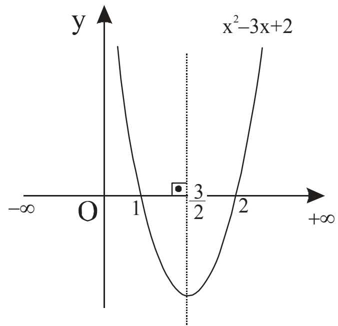
$x^2 - 3x > 4$

ή $x^2 - 3x - 4 > 0$

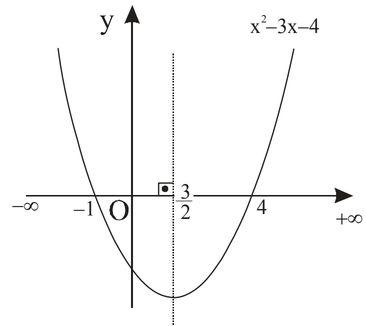
Οι ρίζες των τριωνύμων είναι:

$x = 1$ ή $x = 2$ $\qquad$ $x = -1$ ή $x = 4$

Η επίλυση των ανισώσεων γίνεται εποπτικά με τα σχήματα (α) και (β).



Σχήμα α



Σχήμα β

Ερμηνεύοντας το σχήμα (α),
βρίσκουμε ότι η ανίσωση:
$x^2 - 3x + 2 < 0$
αληθεύει για όλα τα x,
για τα οποία ισχύει: $1 < x < 2$.

Ερμηνεύοντας το σχήμα (β),
βρίσκουμε ότι η ανίσωση:
$x^2 - 3x - 4 > 0$
αληθεύει για όλα τα x,
για τα οποία ισχύει: $x < -1$ ή $x > 4$.

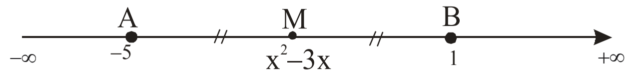
Επομένως η ανίσωση $|x^2 - 3x - 1| > 3$ αληθεύει για όλα τα x, για τα οποία ισχύει: $x < -1$ ή $1 < x < 2$ ή $x > 4$.

Δίνουμε στη συνέχεια ακόμη ένα παράδειγμα εξίσωσης με απόλυτες τιμές παραστάσεων της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.

Να βρεθούν οι τιμές του x, ώστε $|x^2 - 3x + 5| = |x^2 - 3x - 1|$.

Απάντηση

Η εξίσωση γράφεται: $|(x^2 - 3x) - (-5)| = |(x^2 - 3x) - 1|$, οπότε θέλουμε το $x^2 - 3x$ να ισαπέχει από τους αριθμούς –5 και 1.

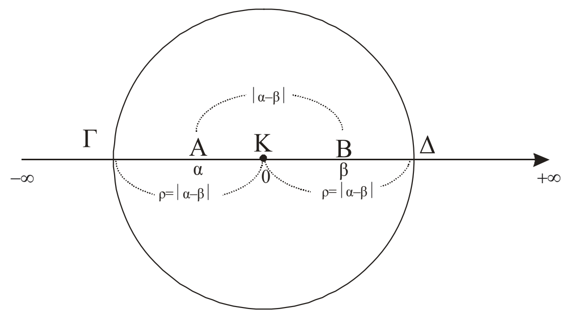


Άρα το $x^2 - 3x$ θα είναι η τετμημένη του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ, οπότε θα είναι $x^2 - 3x = \dfrac{-5+1}{2}$ δηλαδή $x^2 - 3x + 2 = 0$, που έχει ρίζες τις: $x = 1$, $x = 2$.

Θα ασχοληθούμε τώρα με μία άλλη ερώτηση:

Αν πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών πάρουμε δύο αριθμούς α και β, τότε ποια είναι η θέση των αριθμών α – β και β – α πάνω στον άξονα;

Απάντηση



Ας πάρουμε, καταρχήν, τους αριθμούς α και β σε μία τυχαία τοποθέτηση πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Με κέντρο την αρχή του άξονα και ακτίνα $\rho = |\alpha - \beta|$, γράφουμε τον κύκλο, που τέμνει τον άξονα στα σημεία Γ και Δ. Οι αριθμοί που αντιστοιχίζονται στα σημεία αυτά είναι οι α – β και β – α.

Είναι φανερό ότι: (ΑΒ) = (ΚΓ) = (ΚΔ).

Συγκεκριμένα: αν β > α, τότε ο αριθμός β – α αντιστοιχίζεται στο Δ, ενώ ο α – β στο Γ. Στην περίπτωση που ήταν β < α, τότε ο αριθμός α – β θα αντιστοιχιζόταν στο Δ και ο β – α στο Γ.

Η σκέψη, που μας οδηγεί στην απάντηση που δώσαμε, στηρίζεται στην ισότητα: $|\alpha - \beta| = |(\alpha - \beta) - 0|$ και στο γεωμετρικό νόημα που δίνουμε σε κάθε μέλος αυτής της ισότητας.