ΜΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ*
ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Του **Δ. Ντρίζου**
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών

Οι προτεινόμενες ασκήσεις αυτού του *σημειώματος* εντάσσονται στην παράγραφο *6.2: Μη Γραμμικά Συστήματα*, της Άλγεβρας Α΄ Γενικού Λυκείου (Ο.Ε.Δ.Β., έκδοση 2010).

Έχει παρατηρηθεί ότι οι περισσότεροι μαθητές για να επιλύσουν ένα γραμμικό σύστημα επιλέγουν συνήθως τη μέθοδο της αντικατάστασης. Αν και έχουν διδαχθεί και άλλες μεθόδους επίλυσης, όταν οι ίδιοι αποφασίζουν ποια μέθοδο θ' ακολουθήσουν, εκεί διαμιάς τούς έρχεται στο νου πρώτα-πρώτα η μέθοδος της αντικατάστασης: μάλλον την θεωρούν πιο οικεία τους μέθοδο, και ίσως και γι αυτό πιο "σίγουρη". Όμως, για την αντιμετώπιση συστημάτων που περιέχουν και μη γραμμικές εξισώσεις, η μέθοδος της αντικατάστασης δεν είναι πάντοτε αποδοτική. Μπροστά σε τέτοιου τύπου συστήματα είναι ανάγκη ο μαθητής-λύτης ν' αφιερώσει λίγο χρόνο για προσεκτικές παρατηρήσεις πριν επιλέξει τη μέθοδο επίλυσης: Είναι ανάγκη να δει αν υπάρχουν συμμετρίες στην εμφάνιση των αγνώστων· να παρατηρήσει ίσως αν κάποιος γραμμικός συνδυασμός των εξισώσεων οδηγεί στην εμφάνιση αλγεβρικών ταυτοτήτων, να δοκιμάσει τι προκύπτει με πρόσθεση ή αφαίρεση εξισώσεων κατά μέλη κ.ά. Να δεί, μ' άλλα λόγια, την κομβική ιδέα που μπορεί να τον οδηγήσει στη "λύση". Και βέβαια, όπως πάντα, η ενσυνείδητη προσωπική προσπάθεια και η συστηματική εξάσκηση θα φέρουν την μεθόδευση, την εμπειρία και τελικά τη γνώση.

Για την επίλυση κάποιων από τα παρακάτω συστήματα μπορεί να φανούν χρήσιμες ορισμένες αξιοσημείωτες ταυτοτήτες και συναφείς ιδιότητες. Ενδεικτικά:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0 \Leftrightarrow x=\alpha \text{ και } y=\beta$$

* Το *σημείωμα* αυτό συμπληρώνει προηγούμενο άρθρο μου με τίτλο ***Η Αλγεβρική Συμμετρία (μέρος πρώτο)***, που είναι αναρτημένο από τις 13.10.09 στην ηλεκτρονική διεύθυνση: http://dide.tri.sch.gr/index.php?option=com_content&task=category&sectionid=1&id=23&Itemid=41

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ xy = -8 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x + y = 3 \end{cases}$

2. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x^2 + xy = 6 \\ y^2 + xy = -2 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x^2 = 12 - xy \\ y^2 = 24 - xy \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x^3 + 2x^2y - y^3 = -44 \\ 2y^3 + 3xy^2 + x^2y = -20 \end{cases}$

3. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} \dfrac{y-2x}{x} - \dfrac{10-2x}{y} + \dfrac{25}{xy} = 0 \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{5}{y} + \dfrac{17}{z} - 19 = 0 \end{cases}$

4. Αν οι διαφορετικοί ανά δύο πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν το σύστημα $\begin{cases} x^3 + \alpha x + \beta = 0 \\ y^3 + \alpha y + \beta = 0 \\ z^3 + \alpha z + \beta = 0 \end{cases}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $x + y + z = 0$

Σημειώσεις

1. Μια λύση της $4^η$ άσκησης:
Αν ονομάσουμε με (1), (2) και (3) τις εξισώσεις του συστήματος, με τη σειρά που αυτές δίνονται, τότε, αφαιρώντας κατά μέλη την (2) από την (1) βρίσκουμε $(x-y)\left(x^2 + xy + y^2 + \alpha\right) = 0$
και επειδή $x \neq y$ παίρνουμε $x^2 + xy + y^2 + \alpha = 0$:(*)

Με εντελώς ανάλογη διαδικασία, αφαιρώντας την (3) από την (1), και παίρνοντας υπόψη ότι $x \neq z$, βρίσκουμε $x^2 + xz + z^2 + \alpha = 0$:(**)
Έπειτα με αφαίρεση κατά μέλη της (**) από την (*)
βρίσκουμε $(y-z)(x+y+z)=0$ και επειδή $y \neq z$ καταλήγουμε στο ζητούμενο $x+y+z=0$

2. Πηγή της $4^{ης}$ άσκησης: 3^{rd} Junior Balkan Mathematical Olympiad Problems 1999
Δείτε σχετικές πληροφορίες στις ηλεκτρονικές διευθύνσεις:
http://www.kidsmathactivities.com/2010/10/3rd-junior-balkan-mathematical-olympiad.html
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=358054

3. Είναι προφανές ότι, μια άσκηση επιλέγεται να προταθεί προς λύση στη σχολική τάξη εφόσον, πρωτίστως, λαμβάνεται υπόψη το γνωστικό επίπεδο των μαθητών της τάξης και, επιπλέον, η ίδια η άσκηση αναδεικνύει ιδέες που καλλιεργούν και αναπτύσσουν τη μαθηματική ικανότητα.