Οι ακρότατες τιμές του τριωνύμου
και άλλων πολυωνύμων δευτέρου βαθμού

ως εφαρμογή των ταυτοτήτων $\alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha \pm \beta)^2$

(Άλγεβρα Α΄ Λυκείου)

Του **Δ. Ντρίζου**
Σχολ. Συμβ. Μαθηματικών

Μετά την διδασκαλία της παραγράφου 1.4. της Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, που αναφέρεται στην *διάταξη των πραγματικών αριθμών* –και με στόχο να εμπεδωθεί από τους μαθητές μία ακόμη ενδιαφέρουσα πτυχή του λειτουργικού ρόλου των ταυτοτήτων– προτείνεται (προαιρετικά) η διδακτική αξιοποίηση των επόμενων απλών παραδειγμάτων.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

(i) Η μέθοδος της *συμπλήρωσης τετραγώνου.*

(ii) Ιδιότητες των ανισοτήτων και ειδικά η θεμελιώδης ιδιότητα: *Αν* α *πραγματικός αριθμός, τότε ισχύει* $(x-\alpha)^2 \geq 0$ *για κάθε τιμή της πραγματικής μεταβλητής* x, *οπότε η ελάχιστη τιμή της παράστασης* $(x-\alpha)^2$ *ισούται με* 0 *και επιτυγχάνεται για* $x=\alpha$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του τριωνύμου x^2-2x+4, καθώς το x μεταβάλλεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Λύση:

Έχουμε $x^2-2x+4 = x^2-2x+1+3 = (x-1)^2+3$

και καθώς $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+3 \geq 3$ προκύπτει ότι η ελάχιστη τιμή του τριωνύμου x^2-2x+4 ισούται με 3 και επιτυγχάνεται για $x=1$.

2. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του τριωνύμου x^2-2x, καθώς το x μεταβάλλεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Λύση:

Έχουμε $x^2-2x = x^2-2x+1-1 = (x-1)^2-1$

και καθώς $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1 \geq -1$ προκύπτει ότι η ελάχιστη τιμή του τριωνύμου x^2-2x ισούται με -1 και επιτυγχάνεται για $x=1$.

3. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του τριωνύμου $-3x^2+6$, καθώς το x μεταβάλλεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Λύση:
Έχουμε $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3x^2 \leq 0 \Leftrightarrow -3x^2+6 \leq 6$. Επομένως η μέγιστη τιμή του τριωνύμου $-3x^2+6$ ισούται με 6 και επιτυγχάνεται για $x=0$.

4. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $x^2+y^2+6x-8y+20$, καθώς τα x και y μεταβάλλονται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Λύση:
Έχουμε
$$\begin{aligned} x^2+y^2+6x-8y+20 &= \left(x^2+6x+9\right)+\left(y^2-8y+16\right)-5 \\ &= (x+3)^2+(y-4)^2-5 \end{aligned}$$
και καθώς $(x+3)^2 \geq 0$ και $(y-4)^2 \geq 0$,
προκύπτει $(x+3)^2+(y-4)^2-5 \geq -5$. Οπότε η ελάχιστη τιμή της παράστασης $x^2+y^2+6x-8y+20$ ισούται με -5 και επιτυγχάνεται για $x=-3$ και $y=4$.

Σχόλιο: Τα τρία πρώτα παραδείγματα (ως ερωτήματα) αποτελούν την άσκηση 1, σελ. 45, του σχολικού βιβλίου *Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής της Γ΄ Λυκείου*. Μόνο που εκεί προτείνονται να λυθούν στο πλαίσιο των Παραγώγων, ενώ παραπάνω αντιμετωπίστηκαν με στοιχειώδη τρόπο.

◙