ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
ΣΤΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ
ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΤΗΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
(ΓΙΑ ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ)

Του Δημητρίου Α. Ντρίζου
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1^{η}

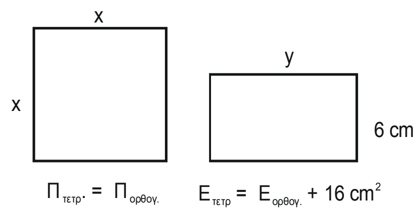
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο που οι κάθετες πλευρές του έχουν μήκη $(x-2)$ και $(x-3)$.

α) Ποιες τιμές επιτρέπεται να πάρει το x ;

β) Να βρείτε την τιμή του x, αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι ίσο με 1.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2^{η}

Ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο έχουν την ίδια περίμετρο. Το ορθογώνιο έχει πλάτος 6 cm, ενώ το εμβαδό του είναι κατά 16 cm^2 μικρότερο από το εμβαδό του τετραγώνου. Να βρείτε τις περιμέτρους και τα εμβαδά των δύο σχημάτων.



Λύση:

Έστω x η περίμετρος του τετραγώνου. Το x πρέπει ασφαλώς να είναι θετικός αριθμός. Τότε η περίμετρος του τετραγώνου είναι $Π = 4x$ cm και το εμβαδό του είναι $Ε_τ = x^2$ cm^2.

Το ορθογώνιο έχει πλάτος 6 και μήκος έστω y.

Έχει περίμετρο $Ε_ο = 2(y + 6)$ cm.

Θα είναι $2y + 12 = 4x$, αφού έχουν ίση περίμετρο. Άρα $2y = 4x - 12$ ή $y = 2x - 6$.

Άρα το εμβαδό του ορθογωνίου είναι $Ε_ο = 6(2x - 6) = 12x - 36$.

Είναι όμως κατά 16 cm^2 μικρότερο από το εμβαδό του τετραγώνου, άρα είναι

$12x - 36 = x^2 - 16$ ή $x^2 - 12x + 20 = 0$. Η εξίσωση είναι δευτεροβάθμια.

Έχει $Δ = 144 - 80 = 64$ και ρίζες $x = 2$ και $x = 10$.

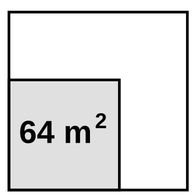
Η ρίζα $x = 2$ απορρίπτεται γιατί θα ήταν τότε:

$Ε_τ = 4$ cm^2 και $Ε_ο = Ε_τ - 16 = -12$ cm^2, που είναι ασφαλώς αδύνατο.

Άρα το τετράγωνο έχει πλευρά 10 cm, περίμετρο 40 cm και εμβαδό 100 cm^2 και το παραλληλόγραμμο έχει πλάτος 6 cm, μήκος 14cm, περίμετρο 40 cm και εμβαδό 84 cm^2.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{0}

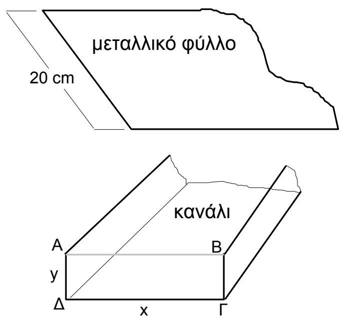
Έχουμε φυτέψει λουλούδια σε έναν τετράγωνο κήπο 64 m^2. Αν διπλασιάσουμε το εμβαδό του κήπου, ώστε και ο νέος κήπος να είναι τετράγωνο, όπως φαίνεται στο σχήμα, να βρείτε τις διαστάσεις του νέου κήπου ;



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^0

Η δουλειά του Γιώργου είναι να παίρνει ένα ορθογώνιο μεταλλικό φύλλο πλάτους 20 cm και να λυγίζει τις άκρες του, ώστε να σχηματίζει ένα κανάλι (λούκι), μέσα από το οποίο θα τρέχει νερό για πότισμα. Οι λυγισμένες άκρες του καναλιού πρέπει να είναι κάθετες πάνω στο υπόλοιπο μεταλλικό φύλλο.

«Να κατασκευάσεις το κανάλι, ώστε να μεταφέρει όσο το δυνατό περισσότερο νερό», του είπαν. Πώς μπορεί να το κάνει αυτό;



Ν. Κλαουδάτος, 7ο σεμινάριο Διδακτικής της Ε.Μ.Ε. (Καρδίτσα, 1995).

ΛΥΣΗ:

Το κανάλι θα μεταφέρει όσο το δυνατό περισσότερο νερό, όταν μία κάθετη τομή του καναλιού, που είναι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, έχει το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδό.

Είναι ΑΔ + ΔΓ + ΓΒ = 20 cm άρα $2y + x = 20$ άρα $y = \frac{20-x}{2}$,

με $0 < x < 20$ και $0 < y < 10$.

Το εμβαδό του ΑΒΓΔ είναι τότε $E(x) = x\cdot \frac{20-x}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 10x,\quad 0 < x < 20$.

Η συνάρτηση $E(x)$ είναι δευτεροβάθμια με συντελεστή του x^2 αρνητικό, άρα παρουσιάζει μέγιστο για $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = 10$.

Είναι: $E\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = E(10) = ... = 50\ \text{cm}^2$

Επομένως το περισσότερο νερό μεταφέρεται από το κανάλι όταν:

$$x = 10 \text{ cm και } y = 5 \text{ cm.}$$

(*Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της Ε(x) και επαληθεύστε γραφικά το αποτέλεσμα*).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3^0

Ένας αγρότης αν μαζέψει και πουλήσει σήμερα τα φρούτα των δέντρων, που καλλιεργεί, τότε το κάθε δέντρο αποδίδει κατά μέσο όρο 40 κιλά και η τιμή πώλησης είναι 1,6 Ευρώ το κιλό. Αν, όμως, τα μαζέψει αργότερα, τότε, για κάθε εβδομάδα που περνά, κάθε δέντρο αποδίδει 5 κιλά περισσότερο και η τιμή πώλησης μειώνεται κατά 10 λεπτά το κιλό.

Αυτό ασφαλώς δεν μπορεί να συμβαίνει διαρκώς! Τα φρούτα θα ωριμάζουν και θα μεγαλώνουν (με το ρυθμό που υποθέσαμε) για ένα διάστημα το πολύ 8 εβδομάδων. Μετά από πόσες εβδομάδες πρέπει να μαζέψει και να πουλήσει τα φρούτα του, ώστε να έχει το μέγιστο κέρδος; Ποιο θα είναι αυτό για κάθε δέντρο;

ΛΥΣΗ:

Αν τα πουλήσει σήμερα θα εισπράξει (*από κάθε δέντρο*) $40 \cdot 1{,}6$ €

Αν τα πουλήσει μετά από 1 εβδομάδα θα εισπράξει $(40 + 1 \cdot 5)\cdot(1{,}6 - 1 \cdot 0{,}10)$ €

Αν τα πουλήσει μετά από 2 εβδομάδες θα εισπράξει $(40 + 2 \cdot 5)\cdot(1{,}6 - 2 \cdot 0{,}10)$ €

. . . .

Αν τα πουλήσει μετά από x εβδομάδες θα εισπράξει $(40 + x \cdot 5)\cdot(1{,}6 - x \cdot 0{,}10)$ €

Αναζητάμε την τιμή του x, (με τον περιορισμό $0 < x < 8$), ώστε το ποσό που θα εισπράξει (*από κάθε δέντρο*) να γίνει μέγιστο, δηλαδή αναζητάμε το x για το οποίο η συνάρτηση

$$\Pi(x) = (5x + 40)(1{,}6 - 0{,}10x) = -0{,}5x^2 + 4x + 64$$

παίρνει την μέγιστη τιμή της.

Η συνάρτηση Π(x) είναι δευτεροβάθμια με συντελεστή του x^2 αρνητικό, άρα παρουσιάζει μέγιστο για $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = 4$.

Είναι: $\Pi\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = \Pi(4) = \ldots = 72$

Επομένως το μέγιστο κέρδος θα το έχει μετά 4 εβδομάδες και θα είναι 72 € από κάθε δέντρο.

(*Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της Π(x) και επαληθεύστε γραφικά το αποτέλεσμα*).

Τα προβλήματα έχουν επιλεγεί από το βιβλίο:
Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου
Γιώργος Ρίζος – Κώστας Γκατζούλης
Εκδόσεις: Γκατζούλη, 2008