Γεωμετρική Έρευνα πάνω στη Θεωρία των Παραλλήλων του N. Lobachevsky

Δημήτρης Ντρίζος
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Τρικάλων και Καρδίτσας
drizosdim@yahoo.gr

Ιστορικό Σημείωμα

Η θεωρία περί των παραλλήλων ευθειών αρχίζει ιστορικά με τον Ευκλείδη (~325 π.Χ) – με τη διατύπωση του 5ου αιτήματος των Στοιχείων του. Το γεγονός δε, ότι ο ίδιος ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί το 5ο αίτημα για να αποδείξει την πρόταση Ι.29 των Στοιχείων του, ενώ δεν το χρησιμοποιεί σε καμιά άλλη προηγούμενη πρότασή του, μας βεβαιώνει κατά κάποιο τρόπο ότι το αξίωμα αυτό μάλλον δεν τέθηκε με σκοπό να καθορίσει το νόημα ή να βεβαιώσει την ύπαρξη κάποιων γεωμετρικών εννοιών. Η ιδιαιτερότητα του 5ου αιτήματος του Ευκλείδη απασχόλησε τους ερευνητές για περισσότερο από δύο χιλιετίες, και είναι ακριβώς το αίτημα εκείνο που έδωσε το έναυσμα για τη δόμηση *Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών*. Η κύρια προσπάθεια των ερευνών εστιάζεται στην αμφισβήτηση του 5ου αιτήματος: δηλαδή στο αν αυτό, ή η άρνησή του, μπορούν να προκύψουν από τα υπόλοιπα αιτήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ο κατάλογος των ερευνητών με αυτόν τον προβληματισμό είναι μακρύς. Μία εντελώς ενδεικτική αναφορά μέχρι τους πρώτους, που τόλμησαν να θεωρήσουν ανοιχτό το 5ο αίτημα ως ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας: Πρόκλος (5ος αιώνας μ.Χ), G. Saccheri (1667-1733), J.H. Lambert (1728-1777), Legendre

(1752-1823), Gauss (1777-1855), N. Lobachevsky (1793-1856), J. Bolyai (1802-1860).

Ανάμεσα στον κατάλογο των σχετικών ερευνών είναι απαραίτητο να επισημάνουμε μια ποιοτική διαφορά: Ορισμένοι ερευνητές στην προσπάθειά τους να αποδείξουν το 5ο αίτημα του Ευκλείδη, στηρίχτηκαν άμεσα ή έμμεσα σε άλλες ισοδύναμες προτάσεις του, και γι' αυτό παρασύρθηκαν να πιστέψουν ότι πέτυχαν λύση του προβλήματος. Μετά από αυτούς ακολουθούν οι ερευνητές στους οποίους αρχίζει να διαφαίνεται, πέραν της κριτικής τους στο 5ο αίτημα, η σύλληψη και διαμόρφωση μιας άλλης ιδέας που θα μπορούσε να βγάλει την έρευνα από το αδιέξοδο.

Η λύση στο κύριο πρόβλημα, όπως αυτό καταρχήν τέθηκε, φαίνεται να μην υπάρχει. Ήδη όμως οι έρευνες οδήγησαν σε μια σειρά μεστών συμπερασμάτων και υποθέσεων, πέρα από τους περιορισμούς που έθετε το 5ο αίτημα. Οι έρευνες του Saccheri, για παράδειγμα, θα μπορούσαν να είχαν οδηγήσει στην ανακάλυψη της λεγόμενης σήμερα Υπερβολικής Γεωμετρίας, αν η προσκόλλησή του στην ισχύ του 5ου αιτήματος δεν ήταν τόσο έμμονη.

Στη συνέχεια ο Lambert εμπλουτίζει ουσιαστικά τα συμπεράσματα του Saccheri, ενώ ο Gauss αποδέχεται –στην αρχή με αμφιβολίες και ταλαντεύσεις– πριν το τέλος του 18ου αιώνα, την ύπαρξη *μη Ευκλείδειων Γεωμετριών*. Δεν προβαίνει όμως σε καμία δημοσίευση των συμπερασμάτων του, φοβούμενος τις αντιδράσεις που θα προκαλούσε το πνεύμα της εποχής. Τελικά η *λύση* έρχεται από τους N. Lobachevsky και J. Bolyai, οι οποίοι θεώρησαν ανοιχτό το 5ο αίτημα και εργαζόμενοι ανεξάρτητα, διακηρύσσουν ότι η Υπερβολική Γεωμετρία υπάρχει και είναι το ίδιο σύννομη στο πλαίσιο των μαθηματικών, με την Ευκλείδεια. Πρώτος, το 1829 ο N. Lobachevsky, καθηγητής ήδη στο πανεπιστήμιο του Καζάν, δημοσιεύει αποτελέσματα των ερευνών του στο περιοδικό του πανεπιστημίου του.

Ο N. Lobachevsky από το 1826 συμπεριέλαβε στα μαθήματά του στοιχεία της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Ακολουθεί, το 1832, η δημοσίευση ερευνών του J. Bolyai (Ούγγρος, αξιωματικός του Αυστριακού στρατού, γιος του μαθηματικού F. Bolyai). Λόγω της μικρής διαφοράς στο χρόνο δημοσίευσης των εργασιών τους, τη δόξα της ανακάλυψης καρπούται ο N. Lobachevsky. Τη νέα γεωμετρική επιστήμη ο N. Lobachevsky στα κείμενά του την ονομάζει, με προσοχή, *Φανταστική*. Πρόκειται γι' αυτήν που σήμερα ονομάζουμε *Υπερβολική Γεωμετρία.* Σ' αυτήν, στη θέση του 5ου αιτήματος του Ευκλείδη, έχει τοποθετηθεί το αξίωμα: *Από σημείο εκτός ευθείας περνούν δύο τουλάχιστον ευθείες που δεν την τέμνουν*.

Η εργασία του N. Lobachevsky *Γεωμετρική έρευνα πάνω στη Θεωρία των Παραλλήλων* αποτελείται από 37 παραγράφους. Οι παράγραφοι 1-15 περιέχουν προτάσεις που είναι υποβοηθητικές για όσα αναλύονται διεξοδικά στις επόμενες παραγράφους. Τα όσα αναφέρονται σ' αυτές τις πρώτες παραγράφους βασίζονται στα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας εκτός του 5ου αιτήματος ή κάποιας άρνησής του.

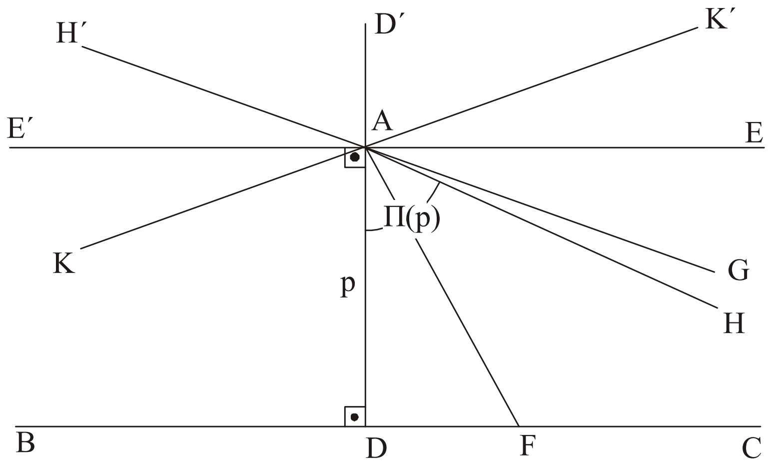
Είναι αξιοσημείωτο ότι στη Γεωμετρία του N. Lobachevsky τα διάφορα μεγέθη, όπως για παράδειγμα οι γωνίες, δημιουργούνται μέσω της συνεχούς κίνησης και των επαναληπτικών διαδικασιών. Όσον αφορά δε τα διάφορα σχήματα που θα χρησιμοποιήσουμε σ΄ αυτό το άρθρο, οφείλουμε να διευκρινίσουμε ότι μικρή σχέση έχουν με την πραγματικότητα στην οποία αναφέρεται η Γεωμετρία του N. Lobachevsky. Απλά τα χρησιμοποιούμε για να υποβοηθήσουμε τη φαντασία μας −αν και κάποιες φορές η χρήση των σχημάτων στις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες μπορεί να κατευθύνει τη σκέψη μας και σε λανθασμένες εκτιμήσεις.

Στη συνέχεια του άρθρου μας θα ασχοληθούμε ενδεικτικά με τη διαπραγμάτευση κάποιων χαρακτηριστικών θεωρημάτων από την εργασία του N. Lobachevsky: *Γεωμετρική έρευνα πάνω στη Θεωρία των Παραλλήλων*.

Ως βασική πηγή χρησιμοποιήσαμε το έργο του R. Bonola: *Non – Euclidean Geometry – A Critical and Historical study of its Develoment – Dover.*

Θεώρημα 16[1]

Η εισαγωγή του Υπερβολικού Αξιώματος στη θεωρία των παραλλήλων.
Η έννοια της παραλληλίας και η γωνία παραλληλίας κατά τον N. Lobachevsky.



Έστω σημείο A εκτός ευθείας BC.
Φέρνουμε το τμήμα AD κάθετο στην BC και την ημιευθεία AE κάθετη στο AD στο σημείο A. Στην ορθή γωνία $E\widehat{A}D$, όλες οι ημιευθείες που διέρχονται από το A, είτε τέμνουν την DC, όπως για παράδειγμα η AF, είτε μερικές από αυτές όπως η AE, δεν τέμνουν την DC.
Στην αβεβαιότητα αν η ημιευθεία AE είναι μοναδική που δεν τέμνει την DC, υποθέτουμε ότι υπάρχουν και άλλες, όπως για παράδειγμα η AG, η οποία δεν τέμνει την DC, όσο και αν προεκταθεί. Στο σημείο τούτο εισάγεται η έννοια του Υπερβολικού Αξιώματος.
Οριοθέτηση της AH: Θεωρούμε την ημιευθεία AF να στρέφεται περί το A κινούμενη προς την ημιευθεία AE. Κατά την συνεχή αυτή κίνηση θα υπάρ-

[1] Διατηρήσαμε την αρίθμηση των θεωρημάτων, όπως σημειώνονται στο έργο του R. Bonola, ώστε κατά τη διαδικασία των αποδείξεων οι παραπομπές στα διάφορα Θεωρήματα να δηλώνονται με την αντίστοιχη αρίθμησή τους, χωρίς να απαιτείται κάθε φορά η πλήρης λεκτική διατύπωσή τους.

ξει μια πρώτη θέση της, έστω η ημιευθεία AH, τέτοια ώστε: Όλες οι ημιευθείες με αρχή το A μέσα στη γωνία $D\widehat{A}H$ τέμνουν την DC ενώ όλες οι ημιευθείες μέσα στην $H\widehat{A}E$ δεν τέμνουν την DC. Η ημιευθεία AH είναι μια οριακή και συγχρόνως μοναδική μέσα στην ορθή γωνία $E\widehat{A}D$, με την ιδιότητα που περιγράψαμε. Αυτήν την ημιευθεία την ονομάζουμε παράλληλη προς την ευθεία BC κατά την διεύθυνση της ημιευθείας DC.

Η γωνία $H\widehat{A}D$ λέγεται γωνία παραλληλίας της ημιευθείας AH προς την δοθείσα ημιευθεία DC και θα συμβολίζεται με Π(p), όπου p = AD.

Σε κάθε περίπτωση είναι $\Pi(p) \leq \frac{1}{2}\pi$

- Αν $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$, τότε η συμμετρία ως προς άξονα την AD επιβάλει την ύπαρξη της ημιευθείας AK, όπως στο σχήμα ώστε γωνία $D\widehat{A}K = \Pi(p)$.

Οδηγούμαστε έτσι ευθέως στην οριοθέτηση της έννοιας *παραλληλία ημιευθειών*: Από το A διέρχονται οι οριακά παράλληλες ημιευθείες AH και AK προς την ευθεία BC, η πρώτη κατά τη διεύθυνση της ημιευθείας DC και η δεύτερη κατά τη διεύθυνση της ημιευθείας DB.

Χαρακτηρισμός όλων των ημιευθειών που διέρχονται από το δοθέν σημείο A σε τέμνουσες και μη τέμνουσες την BC:

- Οι AH, AK και οι προεκτάσεις τους AH΄ και AK΄ δεν τέμνουν την BC.
- Οι ημιευθείες που βρίσκονται μέσα στη γωνία $H\widehat{A}K = 2\Pi(p)$, που βλέπει την BC, καθώς και οι ημιευθείες που βρίσκονται μέσα στη γωνία $K'\widehat{A}H'$, που δεν βλέπει την BC, τέμνουν την BC.
- Οι ημιευθείες που βρίσκονται μέσα στις γωνίες $H\widehat{A}K'$ και $K\widehat{A}H'$ δεν τέμνουν την BC.

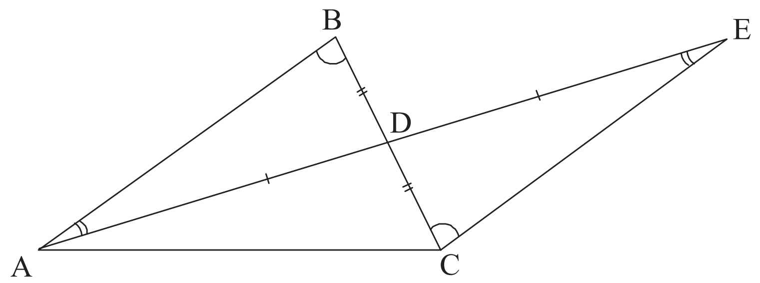
Τονίζουμε εδώ με ιδιαίτερο τρόπο ότι η παραμικρή παρέκκλιση της AH προς το μέρος της AF, μας οδηγεί σε μια νέα θέση της AH η οποία θα τέμνει πλέον την ημιευθεία DC

Επισημαίνουμε επίσης την αντίληψη του N. Lobachevsky περί της γωνίας ως ενός συνεχώς μεταβαλλομένου μεγέθους.

- Αν $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$, τότε οδηγούμαστε στην Ευκλείδεια άποψη περί μοναδικής παράλληλης από το A προς την BC.

Θεώρημα 19

Σε ένα ευθύγραμμο τρίγωνο, το άθροισμα των τριών γωνιών δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από δύο ορθές γωνίες.



Υποθέτουμε ότι στο τρίγωνο ABC το άθροισμα των τριών γωνιών είναι π + α και ότι η BC είναι η μικρότερη πλευρά του. Προεκτείνουμε την AD (D: το μέσο της BC) κατά τμήμα DE = AD, όπως στο σχήμα.

Στα τρίγωνα ADB και CDE είναι:

$$A\hat{B}D = D\hat{C}E \quad \text{και} \quad B\hat{A}D = D\hat{E}C .$$

Λόγω αυτών των ισοτήτων προκύπτει ότι:

1. το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ACE θα είναι π + α, όπως στο τρίγωνο ABC. Και αυτό γιατί, για τις γωνίες του τριγώνου ACE είναι:

$$E\widehat{A}C + A\widehat{C}E + A\widehat{E}C = E\widehat{A}C + A\widehat{C}B + B\widehat{C}E + B\widehat{A}E =$$
$$= \left(E\widehat{A}C + B\widehat{A}E\right) + A\widehat{C}B + A\widehat{B}C =$$
$= \pi + \alpha$ (*π + α: άθροισμα γωνιών στο τρίγωνο ABC*).

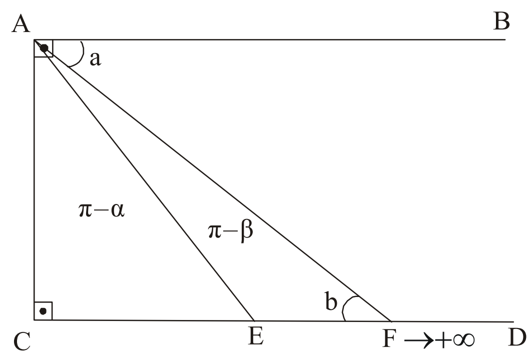
2. η μικρότερη γωνία $B\widehat{A}C$ του τριγώνου ABC έχει χωριστεί από την AE σε δυο γωνίες, όπως στο σχήμα, τις:

   $E\widehat{A}C$ και $A\widehat{E}C$, $\left(A\widehat{E}C = B\widehat{A}D\right)$, (*αναφερόμαστε στα μέτρα των γωνιών)*.

Η προηγούμενη διαδικασία μας οδήγησε στο τρίγωνο ACE, χωρίζοντας τη μικρότερη γωνία του τριγώνου ABC, με τον τρόπο που περιγράψαμε.
Αν συνεχίσουμε τη διαδικασία αυτή φτάνουμε σε ένα τρίγωνο, που θα έχει πάλι άθροισμα των τριών γωνιών του ίσο με π + α και δυο γωνίες κάθε μια από τις οποίες θα έχει (απόλυτο) μέτρο μικρότερο από $\frac{1}{2}$ α. Επειδή όμως η τρίτη γωνία δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από π, θα πρέπει το α να είναι είτε ίσο με το μηδέν είτε αρνητικό.
Επομένως σε ένα ευθύγραμμο τρίγωνο το άθροισμα των τριών γωνιών δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από δύο ορθές γωνίες.

Θεώρημα 22

Αν δυο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία γραμμή είναι παράλληλες μεταξύ τους τότε το άθροισμα των τριών γωνιών σε ένα ευθύγραμμο τρίγωνο ι-σούται με δυο ορθές γωνίες.



Θεωρούμε τα σημεία E, F της CD με CF > CE και τις ευθείες AB, CD παράλληλες μεταξύ τους και κάθετες στην AC. Επίσης τις γωνίες a και b, όπως στο σχήμα.
Υποθέτουμε τώρα ότι το άθροισμα των τριών γωνιών των ορθογωνίων τριγώνων ACE και AEF είναι $\pi - \alpha$ και $\pi - \beta$ αντίστοιχα, όπου α και β μη αρνητικοί. Τότε το άθροισμα των τριών γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ACF θα είναι $\pi - \alpha - \beta$.

Στο τρίγωνο ACF είναι: $\pi - \alpha - \beta = C\hat{A}F + A\hat{C}F + A\hat{F}C$

$$\Rightarrow \pi - \alpha - \beta = \left(\frac{\pi}{2} - a\right) + \frac{\pi}{2} + b$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = a - b$$

Μπορούμε τώρα να θεωρήσουμε το σημείο F οσοδήποτε μακριά από το C, έτσι ώστε το μήκος CF να τείνει στο $+\infty$. Υπό την έννοια αυτή το μέτρο της b τείνει στο 0. Το ίδιο ισχύει στην περίπτωση αυτή και για το μέτρο της a.
Σημειώνουμε ότι η παραπάνω θεώρηση του F δίνει κάθε φορά το μήκος του CF μέσα από μια διαδικασία ορίου.
Αν πάρουμε υπόψη τη σχέση $\alpha + \beta = a - b$, που αποδείξαμε παραπάνω, τότε για τις α και β δεν μπορούμε να έχουμε άλλα μέτρα παρά $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ και έτσι οδηγούμαστε τελικά στην απόδειξη του θεωρήματος 22.

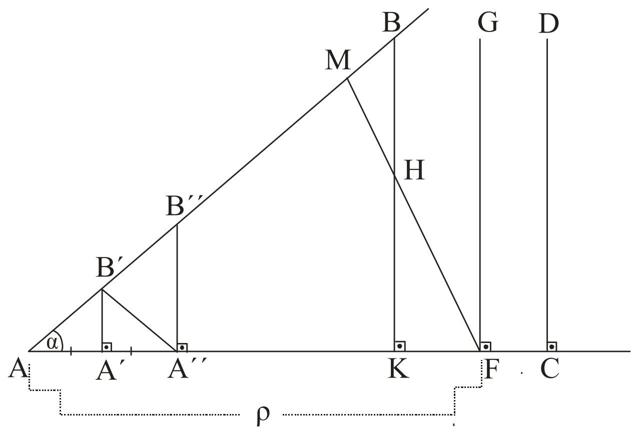
Οριοθέτηση της Ευκλείδειας και της Υπερβολικής Γεωμετρίας, στη βάση του αθροίσματος των γωνιών τριγώνου.

Σε οποιοδήποτε ευθύγραμμο τρίγωνο προκύπτει ότι το άθροισμα των τριών γωνιών θα είναι είτε π και ταυτόχρονα $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$ για κάθε p, είτε μικρότερο του π και ταυτόχρονα $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$. (*Τα Π(p) και p όπως ορίστηκαν στο θεώρημα 16*).

Η πρώτη από τις δυο *υποθέσεις* αποτελεί τη βάση από την οποία απορρέει η συνήθης (Ευκλείδεια) Γεωμετρία και Τριγωνομετρία, η δε δεύτερη μπορεί να γίνει εξίσου αποδεκτή χωρίς να δημιουργεί αντιφάσεις ως προς τα αποτελέσματά της. Αυτή, η δεύτερη, οδηγεί στη δημιουργία μιας νέας Γεωμετρικής επιστήμης που ο N. Lobachevsky ονομάζει *Φανταστική Γεωμετρία*, (πρόκειται για την ονομαζόμενη σήμερα *Υπερβολική Γεωμετρία*).

Θεώρημα 23

Για κάθε δεδομένη οξεία γωνία $B\widehat{A}C = \alpha$, υπάρχει ένα σημείο F στην πλευρά AC ώστε η γωνία παραλληλίας Π(ρ) στο Α ως προς την ημιευθεία FG, την κάθετη προς την AC στο F, γίνεται ίση με την α.



Σχήμα 1

Έστω τυχόν σημείο Β΄ της ημιευθείας ΑΒ, σχήμα 1. Φέρνουμε την Β΄Α΄ κάθετη στην AC και παίρνουμε στην AC το Α΄Α΄΄ = ΑΑ΄
Ακολούθως φέρνουμε την Α΄΄Β΄΄ κάθετη προς την AC στο Α΄΄ και συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο ώσπου να πάρουμε την CD, όπως στο σχήμα 1, που δεν τέμνει την ΑΒ.
Η ύπαρξη της CD με την ιδιότητά της να μην τέμνει την ΑΒ αιτιολογείται ως εξής: έστω ότι το άθροισμα των τριών γωνιών στο ΑΑ΄Β΄ είναι π – a, τότε στο τρίγωνο ΑΒ΄Α΄΄ είναι π – 2a και στο ΑΑ΄΄Β΄΄ είναι λιγότερο από π – 2a. Συνεχίζοντας τη διαδικασία αυτή, κάποια στιγμή το άθροισμα περνά, για πρώτη φορά, από το 0 σε αρνητικό μέτρο. Από το σημείο αυτό και μετά

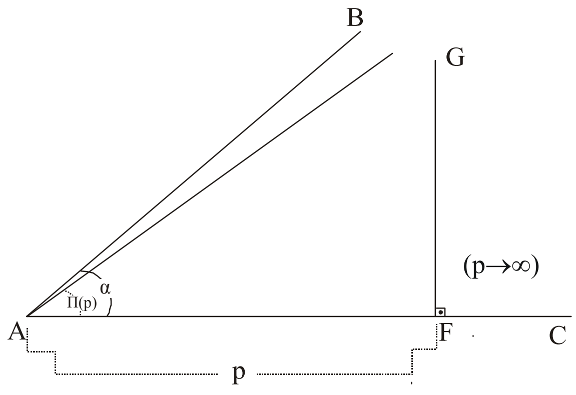
δεν μπορούμε πλέον να σχηματίσουμε τρίγωνο.
Σύμφωνα με το θεώρημα 16, η προηγούμενη διαδικασία θα μας οδηγήσει στην FG, καθώς για πρώτη φορά θα περνάμε από τις κάθετες προς την AC που τέμνουν την AB, σε αυτές που δεν τέμνουν την AB.

Αποδεικνύουμε ακολούθως ότι η ημιευθεία FG είναι πράγματι παράλληλη προς την AB κατά την έννοια του *N. Lobachevsky* οπότε AF = p.

Η κατ' ελάχιστον παρέκκλιση της ημιευθείας FG περί το F προς το μέρος του A, μας οδηγεί στη νέα της θέση FH. Φέρνουμε την HK κάθετη στην AC.
Σύμφωνα με το θεώρημα του Pasch αφού η FH τέμνει την πλευρά KB του ορθογωνίου τριγώνου ABK στο εσωτερικό της σημείο H, θα τέμνει και την υποτείνουσα AB. Συνεπώς η FG είναι, σύμφωνα με το θεώρημα 16, παράλληλη στην AB, οπότε AF = p.

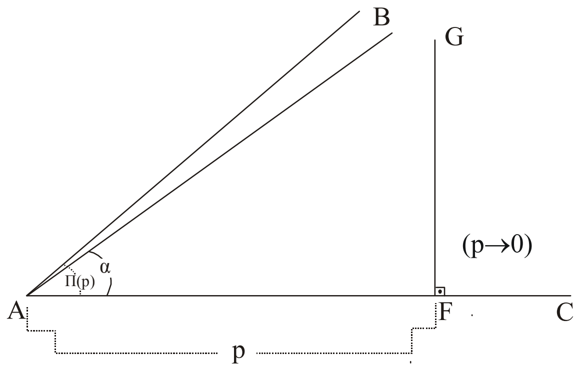
Ερχόμαστε τώρα στο επίκεντρο του θεωρήματος 23

Δεδομένης της γωνίας $B\widehat{A}C = \alpha$ θα αποδείξουμε ότι υπάρχει πάνω στην AC θέση του σημείου F (*F: όπως ορίστηκε παραπάνω*), ώστε για τη γωνία παραλληλίας Π(p) στο A, προς την ημιευθεία FG, ισχύει Π(p)=α.
Εύκολα βλέπει κανείς ότι όταν το F κινείται απομακρυνόμενο διαρκώς από το A επί της AC, τότε το μήκος AF = p μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλο θέλουμε. Στην περίπτωση αυτή περνάμε σε θέσεις του F για τις οποίες είναι Π(p)< α, σχήμα 2.



Σχήμα 2

Αντίστοιχα όταν το F κινείται επί της AC πλησιάζοντας το A, τότε το μήκος AF = p, μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό θέλουμε. Στην περίπτωση αυτή περνάμε σε θέσεις του F για τις οποίες είναι Π(p) > α, σχήμα 3.



Σχήμα 3

Λόγω τώρα της συνέχειας στη μεταβολή των γωνιών, θα υπάρχει μια θέση του σημείου F για την οποία θα είναι Π(p) = α.

Βιβλιογραφία

[1] R. Bonola, *Non–Euclidean Geometry – A Critical and Historical study of its Develoment*, Dover.

[2] Π. Στράντζαλος, *Στοιχεία από τη νεότερη Ιστορία των Μαθηματικών: Η εξέλιξη της Θεωρίας των Ευκλείδιων και των μη Ευκλείδιων Γεωμετριών μετά το 1750.*

[3] Περιοδικό ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗ, τεύχος 3, 1976.